Berechnung von Umgebungs- und Intervallwahrscheinlichkeiten

An einigen Beispielen soll gezeigt werden, wie mit der Tabelle normalverteilter Zufallsvariablen zu arbeiten ist.
Zu beachten ist, dass die zu dem Wert z gehörige Umgebung immer symmetrisch zum Erwartungswert μ liegt.

1. Gegeben ist ein n- stufiger Bernoulli- Versuch mit n = 500 und p = 0,33.
   Zu bestimmen ist die Wahrscheinlichkeit für die Anzahl der Erfolge im Intervall [150 ; 180]. Es soll mit einer Genauigkeit von drei Stellen hinter dem Komma gerechnet werden.
   $n = 500 \quad p = 0{,}33 \quad \Rightarrow \mu = 500 \cdot 0{,}33 = 165$

$$\begin{matrix} n = 500 \\ p = 0{,}33 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \mu = n \cdot p = 500 \cdot 0{,}33 = 165 \\ \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{165 \cdot 0{,}67} = \sqrt{110{,}55} \approx 10{,}514 > 3 \end{matrix}$$

$$P(150 \le X \le 180) = P(149{,}5 \le X \le 180{,}5)^{*)}$$

$\Rightarrow$ Radius um den Erwartungswert: $r = \mu - 149{,}5 = 165 - 149{,}5 = 15{,}5$

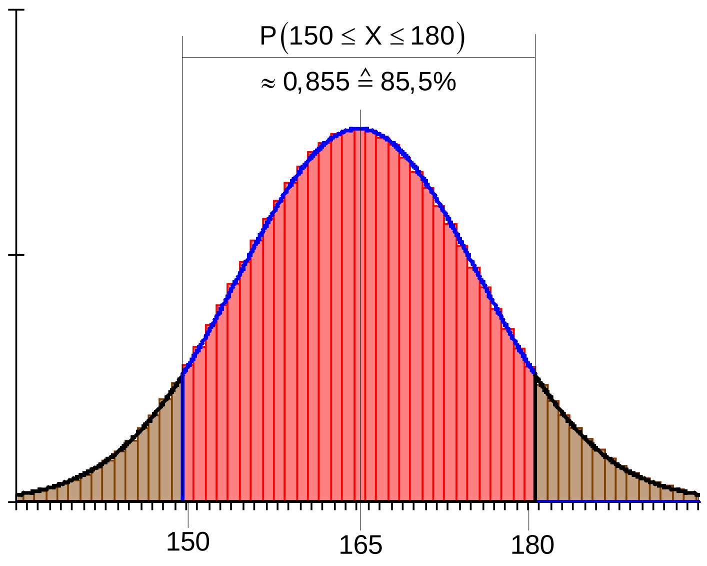
$$\frac{r}{\sigma} = z = \frac{15{,}5}{\sqrt{110{,}55}} \approx 1{,}474 \Rightarrow r = z \cdot \sigma \approx 1{,}474 \cdot \sigma$$

$$P(150 \le X \le 180) = P(\mu - z \cdot \sigma \le X \le \mu + z \cdot \sigma) = P(\mu - 1{,}474 \cdot \sigma \le X \le \mu + 1{,}474 \cdot \sigma)$$

$z = 1{,}474 \Rightarrow$ Tabellenwert: $0{,}858$

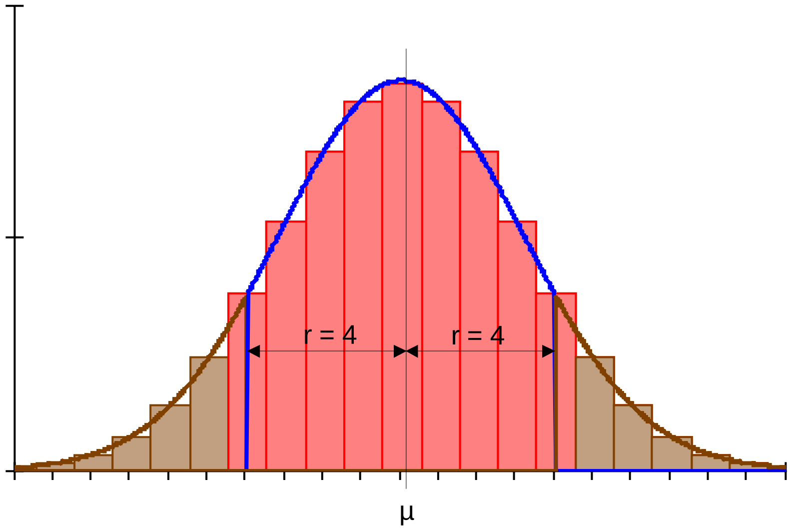
$$\underline{\underline{P(150 \le X \le 180) \approx 0{,}858 \quad (85{,}8\%)}}$$

Die Wahrscheinlichkeit für die Anzahl der Erfolge im Intervall [150 ; 180] beträgt etwa 85,8%

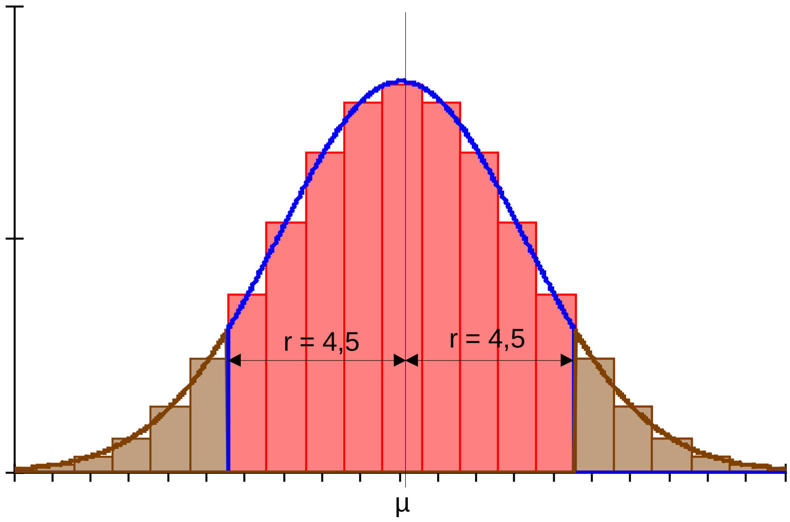


Warum sind die Intervallgrenzen um jeweils 0,5 zu vergrößern, wenn mit den Tabellenwerten der Normalverteilung die Intervallwahrscheinlichkeit bestimmt wird?
Bei $P(150 \le X \le 180) = P(149{,}5 \le X \le 180{,}5)$ war das der Fall.

Die Daten der verwendeten Tabelle basieren auf der Normalverteilung. Würde man den Radius r = 165 – 150 = 15 wählen, so wäre dieser um 0,5 zu klein. Er würde nur die halbe Fläche der Säule von k = 150 bzw. von k = 180 berücksichtigen.
Die folgende Grafik soll das erläutern.



Der gewählte Radius r = 4 ist zu klein. Er berücksichtigt auf jeder Seite vom Erwartungswert eine halbe Säule zu wenig, so dass die gewählte Umgebung nicht vollständig erfasst wird.



Der gewählte Radius r = 4,5 berücksichtigt auf jeder Seite vom Erwartungswert eine halbe Säule mehr, so dass die gewählte Umgebung vollständig erfasst wird.

2. Bestimmen Sie die 90% - Umgebung vom Erwartungswert
für n = 550 und p = 0,36

$$\begin{matrix} n = 550 \\ p = 0,36 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \mu = n \cdot p = 550 \cdot 0,36 = 198 \\ \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{198 \cdot 0,64} = \sqrt{126,72} \approx 11,257 > 3 \end{matrix}$$

$P(\mu - z \cdot \sigma \le X \le \mu + z \cdot \sigma) = 0,90$

Der dazugehörige z- Wert wird aus der Tabelle abgelesen für $P = 0,90$

$z = 1,64 \Rightarrow$ Umgebungsradius: $r = z \cdot \sigma \approx 1,64 \cdot \sqrt{126,72} \approx 18,46$

$\mu - z \cdot \sigma = 198 - 18,46 = 179,54 \approx 180$

$\mu + z \cdot \sigma = 198 + 18,46 = 216,46 \approx 216$

Das Intervall soll symmetrisch zum Erwartungswert $\mu = 198$ liegen.

Wir wählen: $P(180 \le X \le 216)$

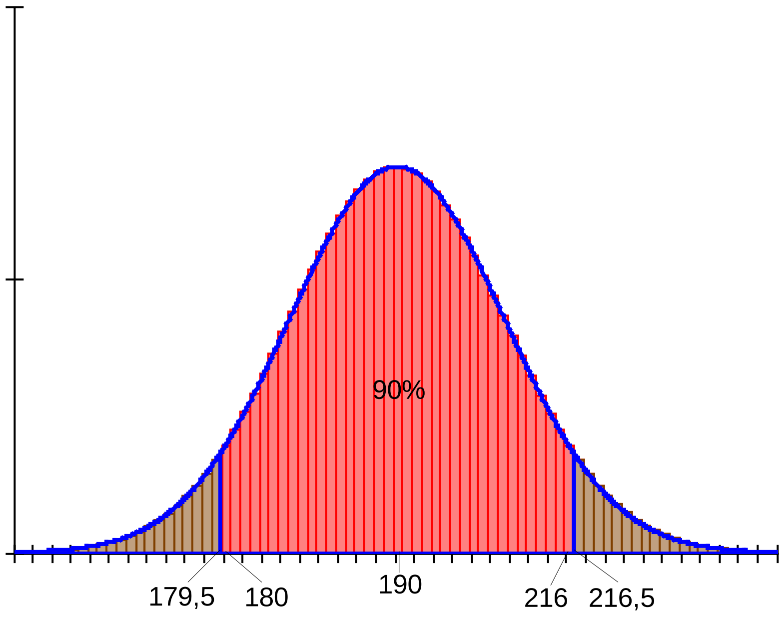
Es ist zu prüfen, ob das Intervall $\{180 ... 198 ... 216\}$ der Forderung (90%) entspricht.

$P(180 \le X \le 216) = P(179,5 \le X \le 216,5)$

$r = 18,5 \Rightarrow \frac{r}{\sigma} = \frac{18,5}{11,257} \Rightarrow r \approx 1,64 \cdot \sigma \Rightarrow z \approx 0,1,64$

$P(180 \le X \le 216) \approx 0,899$

Die Wahrscheinlichkeit für die Anzahl der Erfolge im Intervall [180 ; 216] beträgt etwa 90%



3. Gegeben ist ein n- stufiger Bernoulli- Versuch. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit für die Ergebnisse außerhalb von Umgebungen um den Erwartungswert.
   a) $n = 300 \quad p = 0{,}56$ bestimmen Sie $P(X < 162)$

   b) $n = 240 \quad p = \frac{1}{3}$ bestimmen Sie $P(X > 80)$

zu a)

$$\begin{matrix} n = 300 \\ p = 0{,}56 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \mu = n \cdot p = 300 \cdot 0{,}56 = 168 \\ \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{168 \cdot 0{,}44} = \sqrt{73{,}92} \approx 8{,}598 > 3 \end{matrix}$$

Zu bestimmen ist die Wahrscheinlichkeit für das Intervall [0 ; 161].
Aus der Tabelle kann nur die Wahrscheinlichkeit für ein um den Erwartungswert symmetrisches Intervall abgelesen werden, dieses enthält die Werte
[162 .... 168 ... 174]. Daran anschließend folgt das
Intervall [175 .... 300], welches aus Symmetriegründen die gleiche Größe wie
[0 ; 161] hat. Es gilt folgender Ansatz:
[{ 0 ... 161 } {162 ... 168 ... 174 } { 175 ... 300}]

$$P(X < 162) = P(X \le 161) = \frac{1}{2}\left[1 - P(161{,}5 \le X \le 174{,}5)\right]$$

$$\text{Radius}: r = 168 - 161{,}5 = 6{,}5 \Rightarrow \frac{r}{\sigma} = z = \frac{6{,}5}{\sqrt{73{,}92}} \approx 0{,}756 \Rightarrow r \approx 0{,}756 \cdot \sigma$$

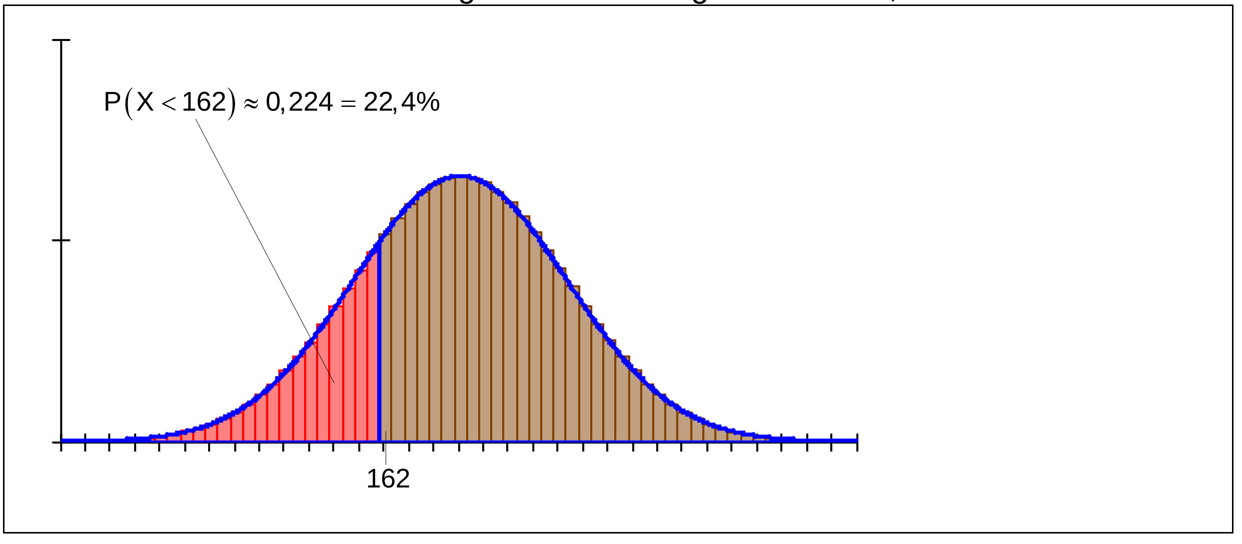
mit $z \approx 0{,}76$ wird

$$P(161{,}5 \le X \le 174{,}5) = P(\mu - z \cdot \sigma \le X \le \mu + z \cdot \sigma) \approx 0{,}553$$

und damit wird

$$P(X < 162) \approx \frac{1}{2}[1 - 0{,}553] = \frac{1}{2} \cdot 0{,}447 = \underline{\underline{0{,}2235}}$$

Die Wahrscheinlichkeit für weniger als 162 Erfolge ist etwa 22,4%



zu b)

$$n = 240 \qquad \mu = n \cdot p = 240 \cdot \frac{1}{3} = 80$$

$$p = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{80 \cdot \frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{160}{3}} \approx 7{,}303 > 3$$

$$[0;79][79{,}5;80{,}5][81;240]$$

$$P(X > 80) = \frac{1}{2}\left[1 - P(79{,}5 \le X \le 80{,}5)\right]$$

$$\text{Radius}: r = 80 - 79{,}5 = 0{,}5 \Rightarrow \frac{r}{\sigma} = z = \frac{0{,}5}{\sqrt{\frac{160}{3}}} \approx 0{,}068 \Rightarrow r \approx 0{,}07 \cdot \sigma$$

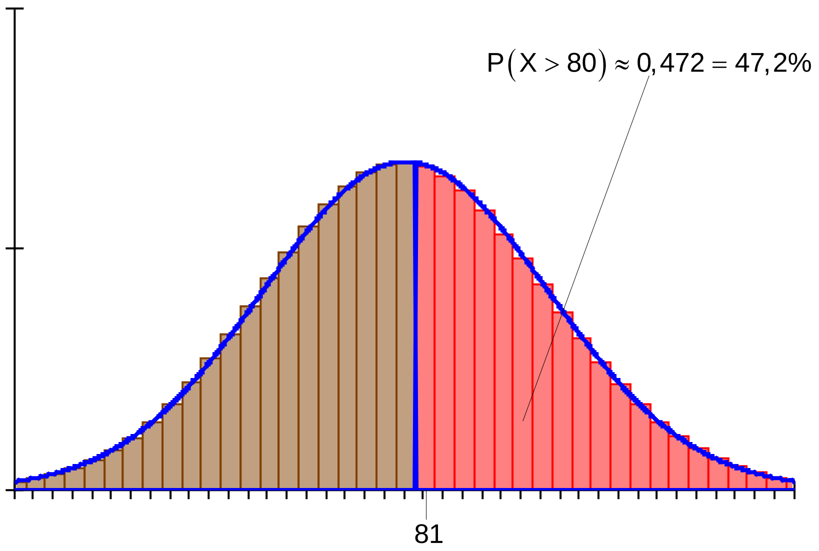
mit $z \approx 0{,}07$ wird

$$P(79{,}5 \le X \le 80{,}5) = P(\mu - z \cdot \sigma \le X \le \mu + z \cdot \sigma) \approx 0{,}056$$

und damit wird

$$P(X > 80) \approx 0{,}5 \cdot (1 - 0{,}056) = 0{,}5 \cdot 0{,}944 \approx \underline{\underline{0{,}472}}$$

Die Wahrscheinlichkeit für mehr als 80 Erfolge ist etwa 47,2%



4. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit einer nicht symmetrischen Umgebung vom Erwartungswert.

$n = 180 \quad p = 0,55$ bestimmen Sie $P(89 \le X \le 104)$

$\left[\{89...93\}\{94...99...104\}\{105...109\}\right]$

Ansatz: $P(89 \le X \le 104) = \frac{1}{2}\left[P(89 \le X \le 109) + P(94 \le X \le 104)\right]$

$$\begin{matrix} n = 180 \\ p = 0,55 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \mu = n \cdot p = 180 \cdot 0,55 = 99 \\ \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{99 \cdot 0,45} = \sqrt{44,55} \approx 6,675 > 3 \end{matrix}$$

$P(89 \le X \le 109) = P(88,5 \le X \le 109,5)$

$r = 10,5 \Rightarrow \frac{r}{\sigma} = z = \frac{10,5}{6,675} \approx 1,57 \Rightarrow r \approx 1,57 \cdot \sigma$

$P(89 \le X \le 109) \approx 0,884$

$P(94 \le X \le 104) = P(93,5 \le X \le 104,5)$

$r = 5,5 \Rightarrow \frac{r}{\sigma} = z = \frac{5,5}{6,675} \approx 0,82 \Rightarrow r \approx 0,82 \cdot \sigma$

$P(94 \le X \le 104) \approx 0,588$

$P(89 \le X \le 104) = \frac{1}{2}[0,884 + 0,588] = 0,736$

Die Wahrscheinlichkeit der Erfolge im Intervall [89 ; 104] ist etwa 73,6%