

## Bernoulli – Versuche und die Binomialverteilung

Viele Zufallsexperimente können als Experimente mit zwei Ergebnissen interpretiert werden, wie z.B.

Münzwurf mit den Ergebnissen Wappen und Zahl.

Wurf einer Heftzwecke mit den Ergebnissen Rücken oder Spitze.

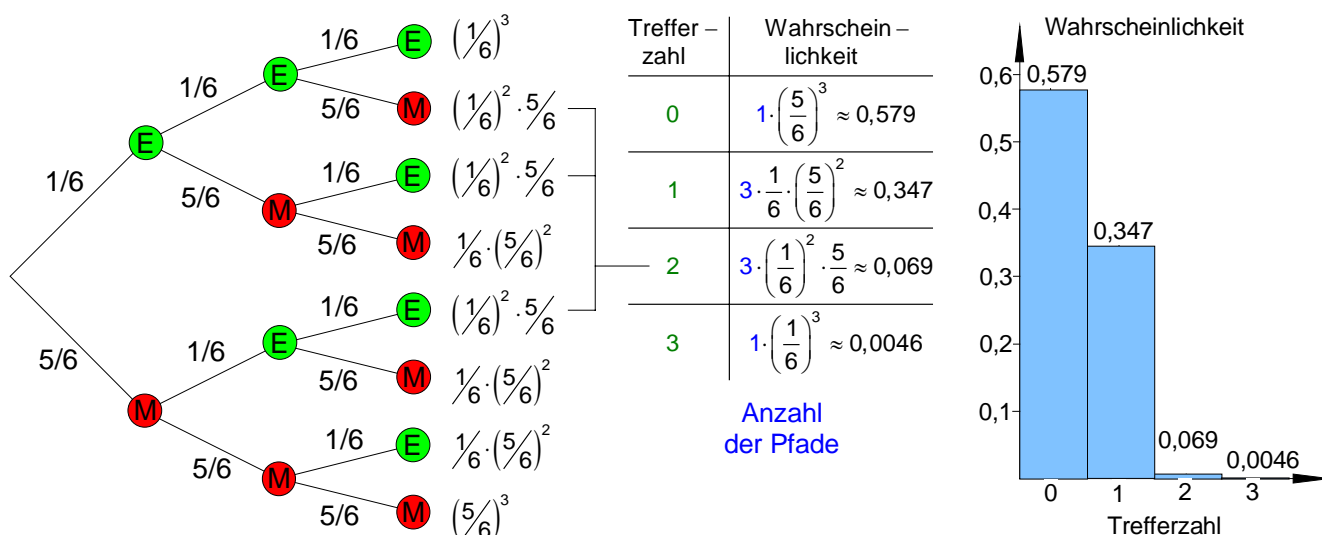
Werfen eines Würfels mit den Ergebnissen 6 oder keine 6.

Solche Experimente heißen **Bernoulli – Experimente**. Die beiden Ergebnisse eines solchen Experiments bezeichnet man als **Erfolg** oder als **Misserfolg**.

Führt man einen solchen Versuch  $n$  – mal durch, so spricht man von einem  **$n$  – stufigen Bernoulli – Versuch** oder einer Bernoullikette der Länge  $n$ . Bei  $n$  –stufigen Bernoulli – Versuchen wird verlangt, dass das Ergebnis eines Einzelversuchs nicht durch die anderen Versuche beeinflusst wird. Man interessiert sich bei einem solchen  $n$  – stufigen Versuch für die Anzahl der Erfolge oder der Misserfolge.

### Einführungsbeispiel

Ein Würfel wird dreimal nacheinander geworfen. Wir interessieren uns für die Wahrscheinlichkeit, mit der die Zahl 6 bei diesem Versuch 0, 1, 2 oder 3 mal auftritt. E bedeutet Erfolg oder Treffer, M bedeutet Misserfolg oder kein Treffer.



Hier handelt es sich um einen dreistufigen Bernoulli – Versuch. Aus dem Baumdiagramm lassen sich mittels der Pfadregeln leicht die Wahrscheinlichkeiten berechnen.

$$S = \{EEE; EEM; EME; EMM; MEE; MEM; MME; MMM\}$$

Die Ergebnismenge enthält 8 Elemente (Anzahl der Pfade), die jeweils aus einer Anordnung von 3 Folgeereignissen besteht.

Bei Erhöhung der Stufenzahl, wird die Bearbeitung der Aufgabe mit dem Baumdiagramm kaum mehr möglich.

## Anzahl der Pfade mit k Erfolgen bei einem n – stufigen Bernoulli – Versuch:

Bei einem n – stufigen Bernoulli – Versuch besteht jedes Element der Ergebnismenge aus n Folgeereignissen .z.B. EEMMEEEM .....EM.

Die Anzahl der Pfade mit k Erfolgen zu finden ist gleichbedeutend damit, aus der Ergebnismenge die Anzahl der Elemente zu finden, die k – mal unabhängig von der Reihenfolge einen Erfolg aufweisen.

Man kann das auch so formulieren:

Auf wie viele Arten kann man k Objekte aus n Objekten unabhängig von der Reihenfolge auswählen?

Das erinnert an das Lotto – Problem, bei dem aus n = 49 Objekten k = 6 Objekte unabhängig von der Anordnung ausgewählt werden. Die Anzahl der Möglichkeiten war in diesem Fall:

$$\binom{49}{6} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \underline{\underline{13.983.816}}$$

Diese Rechenvorschrift lässt sich auch auf den Bernoulli – Versuch übertragen, wenn wir die Anzahl der Pfade mit k Erfolgen suchen.

Für unser Beispiel galt: n = 3; k = 0;1;2;3

k = Anz. Erfolge	Anz. der Pfade
0	$\binom{3}{0} = 1$
1	$\binom{3}{1} = \frac{3}{1} = 3$
2	$\binom{3}{2} = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} = 3$
3	$\binom{3}{3} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 1$

Die Anzahl der **Pfade** mit k Erfolgen bei einem n- stufigen Bernoulli- Versuch ist:

$\binom{n}{k}$  wobei n die Anzahl der Versuche und  
 $\binom{n}{k}$  k die Anzahl der Erfolge ist

Beispiel:

Ein Würfel wird n = 5 mal geworfen.

Als Erfolg werten wir die Augenzahl 6.

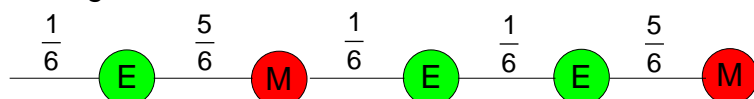
Wie viel **Pfade mit k = 3 Erfolgen** gibt es im Ergebnisbaum?

Die Anzahl der Pfade mit k = 3 Erfolgen ist:  $\binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$

Es gibt bei diesem Versuch also insgesamt 10 Pfade, die jeweils 3 Erfolge beinhalten.

## Wahrscheinlichkeit für einen Pfad mit k Erfolgen bei einem n – stufigen Bernoulli – Versuch:

An einem konkreten Beispiel soll die Rechenvorschrift zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit eines Pfades gezeigt werden. Diese Vorschrift ist dann zu verallgemeinern.



Die Wahrscheinlichkeit dieses Pfades lässt sich mit der Pfadmultiplikationsregel bestimmen:

$$P(\text{EMEEM}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2$$

Die Anzahl der Stufen für dieses Zufallsexperiment ist  $n = 5$ .

Die Anzahl der Erfolge ist  $k = 3$ .

Die Anzahl der Misserfolge ist  $n - k = 5 - 3 = 2$ .

Diese Zahlen treten als Exponenten der Wahrscheinlichkeiten für einen Erfolg ( $p = 1/6$ ) bzw. für einen Misserfolg ( $q = 5/6$ ) auf.

Es gilt  $q = 1 - p = 1 - 1/6 = 5/6$ .

Damit lässt sich die Wahrscheinlichkeit für  $n = 5$  und  $k = 3$  wie folgt berechnen:

$$P(\text{EMEEM}) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right)^2 = p^3 \cdot (1-p)^2$$

### Verallgemeinerung:

Da es sich bei einem  $n$  – stufigen Bernoulli – Versuch um einen Versuch handelt, bei dem in jeder Stufe die Erfolgswahrscheinlichkeit  $P(E) = p$  gleich bleibt, gilt nach der Pfadmultiplikationsregel für jeden Pfad mit  $k$  Erfolgen und  $n - k$  Misserfolgen:

$$\text{Pfadwahrscheinlichkeit} = p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

wobei  $1-p$  die Wahrscheinlichkeit für einen Misserfolg darstellt.

### Wahrscheinlichkeit für $k$ Erfolge bei einem $n$ – stufigen Bernoulli – Versuch:

$$P(X = k) = \underbrace{\binom{n}{k}}_{\text{Anzahl der Pfade mit } k \text{ Erfolgen}} \cdot \underbrace{p^k \cdot (1-p)^{n-k}}_{\text{Wahrscheinlichkeit für einen Pfad mit } k \text{ Erfolgen und } n-k \text{ Misserfolgen}}$$

Bemerkung zum Binomialkoeffizienten  $\binom{n}{k}$  mit  $q = (1-p)$

$$(q+p)^n = \binom{n}{0} \cdot p^0 \cdot q^n + \binom{n}{1} \cdot p^1 \cdot q^{n-1} + \binom{n}{2} \cdot p^2 \cdot q^{n-2} + \dots + \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} + \dots + \binom{n}{n} \cdot p^n \cdot q^0$$

Das ist der Binomische Lehrsatz.

Für das Einführungsbeispiel mit  $n = 3$  gilt:

$$P(X = 0) = \binom{3}{0} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216} \approx \underline{\underline{0,579}}$$

$$P(X = 1) = \binom{3}{1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{3}{1} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{75}{216} \approx \underline{\underline{0,347}}$$

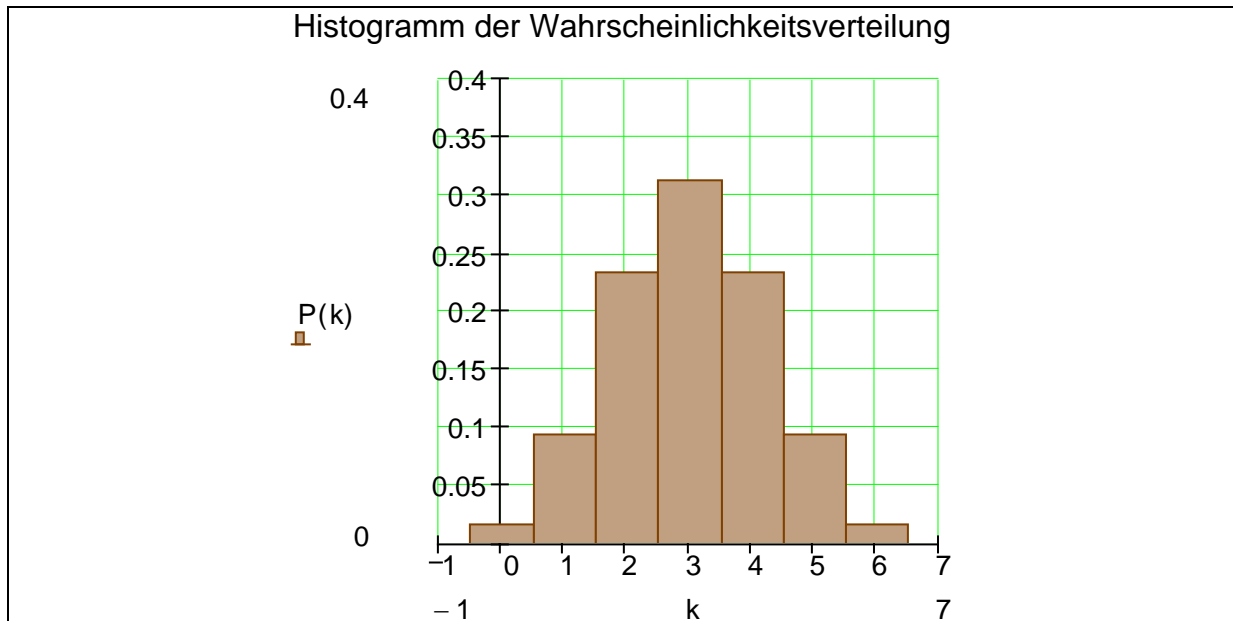
$$P(X = 2) = \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right) = \frac{15}{216} \approx \underline{\underline{0,069}}$$

$$P(X = 3) = \binom{3}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^0 = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot 1 = \frac{1}{216} \approx \underline{\underline{0,0046}}$$

<b>Binomialverteilung:</b>	<p>Bei einem <math>n</math> – stufigen Bernoulli – Versuch mit der Erfolgswahrscheinlichkeit <math>p</math> und der Misserfolgswahrscheinlichkeit <math>1 - p</math>, gilt für die Wahrscheinlichkeit von <math>k</math> Erfolgen:</p> $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ <p>Diese Wahrscheinlichkeitsverteilung heißt <b>Binomialverteilung</b>.</p>
----------------------------	--

<b>Übung:</b>	<p>Eine Familie hat 6 Kinder. Die Wahrscheinlichkeit ein Mädchen zu gebären betrage <math>p = 0,5</math>. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den 6 Kindern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 Mädchen sind und zeichnen Sie das Histogramm der Wahrscheinlichkeitsverteilung. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:</p> <p>A: Genau die Hälfte der Kinder sind Mädchen.          B: Höchstens die Hälfte der Kinder sind Mädchen.          C: Mindestens die Hälfte der Kinder sind Mädchen.</p>
---------------	--

<b>Lösung:</b>	<p>Das Problem kann als 6 – stufiger Bernoulli – Versuch betrachtet werden mit <math>n = 6</math> und <math>p = 0,5</math>. Gesucht ist <math>P(X = k)</math> für <math>k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6</math></p> $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ $P(X = 0) = \binom{6}{0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 1 \cdot \frac{1}{64} = \frac{1}{64} = \underline{\underline{0,015625}}$ $P(X = 1) = \binom{6}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 6 \cdot \frac{1}{64} = \frac{6}{64} = \underline{\underline{0,09375}}$ $P(X = 2) = \binom{6}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 15 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 15 \cdot \frac{1}{64} = \frac{15}{64} = \underline{\underline{0,234375}}$ $P(X = 3) = \binom{6}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 20 \cdot \frac{1}{64} = \underline{\underline{0,3125}}$ $P(X = 4) = \binom{6}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 15 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 15 \cdot \frac{1}{64} = \frac{15}{64} = \underline{\underline{0,234375}}$ $P(X = 5) = \binom{6}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 6 \cdot \frac{1}{64} = \frac{6}{64} = \underline{\underline{0,09375}}$ $P(X = 6) = \binom{6}{6} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 1 \cdot \frac{1}{64} = \frac{1}{64} = \underline{\underline{0,015625}}$
----------------	--



$P(A) = P(X = 3) = \underline{0,3125}$  ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den 6 Kindern genau drei Mädchen sind.

$P(B) = P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$

$= \frac{1}{64} + \frac{6}{64} + \frac{15}{64} + \frac{20}{64} = \frac{42}{64} = \frac{21}{32} = \underline{0,65625}$  ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den 6 Kindern höchstens drei Mädchen sind.

$P(C) = P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6)$

$= \frac{20}{64} + \frac{15}{64} + \frac{6}{64} + \frac{1}{64} = \frac{42}{64} = \frac{21}{32} = \underline{0,65625}$  ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den 6 Kindern mindestens drei Mädchen sind.

- Übung:** Eine Münze wird 5 mal geworfen und  $p$  sei 0,5.
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen  $X$ : Anzahl der Wappen.
  - Mit welcher Wahrscheinlichkeit wirft man
    - Höchstens 3 mal Wappen
    - Weniger als 3 mal Wappen
    - mindestens 1 mal Wappen
    - mehr als einmal Wappen?

<b>Lösung:</b>	Das Problem kann als 5 – stufiger Bernoulli – Versuch betrachtet werden mit $n = 5$ und $p = 0,5$ .														
	a) Gesucht ist $P(X = k)$ für $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$														
	<table border="1"> <thead> <tr> <th>k</th> <th><math>P(X = k)</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td><math>\binom{5}{0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5-0} = 1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}</math></td> </tr> <tr> <td>1</td> <td><math>\binom{5}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5-1} = \frac{5}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 5 \cdot \frac{1}{2^5} = \frac{5}{32}</math></td> </tr> <tr> <td>2</td> <td><math>\binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5-2} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 10 \cdot \frac{1}{2^5} = \frac{10}{32}</math></td> </tr> <tr> <td>3</td> <td><math>\binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5-3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 10 \cdot \frac{1}{2^5} = \frac{10}{32}</math></td> </tr> <tr> <td>4</td> <td><math>\binom{5}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5-4} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 5 \cdot \frac{1}{2^5} = \frac{5}{32}</math></td> </tr> <tr> <td>5</td> <td><math>\binom{5}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5-5} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot 1 = 1 \cdot \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}</math></td> </tr> </tbody> </table>	k	$P(X = k)$	0	$\binom{5}{0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5-0} = 1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$	1	$\binom{5}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5-1} = \frac{5}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 5 \cdot \frac{1}{2^5} = \frac{5}{32}$	2	$\binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5-2} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 10 \cdot \frac{1}{2^5} = \frac{10}{32}$	3	$\binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5-3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 10 \cdot \frac{1}{2^5} = \frac{10}{32}$	4	$\binom{5}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5-4} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 5 \cdot \frac{1}{2^5} = \frac{5}{32}$	5	$\binom{5}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5-5} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot 1 = 1 \cdot \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$
k	$P(X = k)$														
0	$\binom{5}{0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5-0} = 1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$														
1	$\binom{5}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5-1} = \frac{5}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 5 \cdot \frac{1}{2^5} = \frac{5}{32}$														
2	$\binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5-2} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 10 \cdot \frac{1}{2^5} = \frac{10}{32}$														
3	$\binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5-3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 10 \cdot \frac{1}{2^5} = \frac{10}{32}$														
4	$\binom{5}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5-4} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 5 \cdot \frac{1}{2^5} = \frac{5}{32}$														
5	$\binom{5}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5-5} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot 1 = 1 \cdot \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$														
	b)														
	(1) Höchstens 3 mal Wappen bedeutet:														
	$P(X \leq 3) = \frac{1}{32} + \frac{5}{32} + \frac{10}{32} + \frac{10}{32} + \frac{5}{32} + \frac{1}{32} = \frac{26}{32} = \underline{\underline{0,8125}}$														
	(2) Weniger als 3 mal Wappen bedeutet:														
	$P(X < 3) = \frac{1}{32} + \frac{5}{32} + \frac{10}{32} = \frac{16}{32} = \underline{\underline{0,5}}$														
	(3) Mindestens 1 mal Wappen bedeutet:														
	$P(X \geq 1) = \frac{5}{32} + \frac{10}{32} + \frac{10}{32} + \frac{5}{32} + \frac{1}{32} = \frac{31}{32} = \underline{\underline{0,96875}}$														
	(4) Mehr als 1 mal Wappen bedeutet:														
	$P(X > 1) = \frac{10}{32} + \frac{10}{32} + \frac{5}{32} + \frac{1}{32} = \frac{26}{32} = \underline{\underline{0,8125}}$														

## Kumulierte Binomialverteilung

Beispiel:

Eine Münze wird 20 mal geworfen. Zu bestimmen sind die Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse:

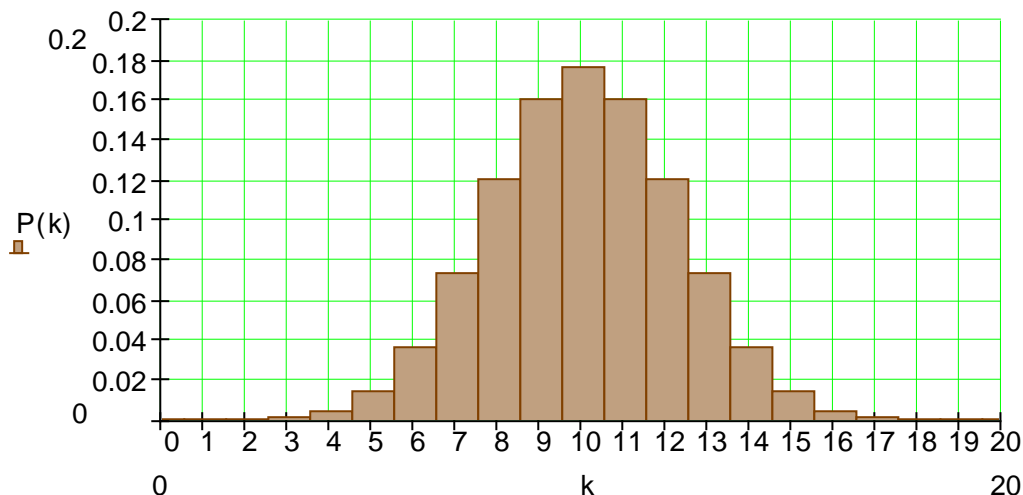
- Genau 10 mal Wappen.
- Höchstens 15 mal Wappen.
- Mindestens 7 mal Wappen.
- Mindestens 6 mal und höchstens 16 mal Wappen.

Die Daten der Wahrscheinlichkeitsverteilung sind in folgender Tabelle zusammengestellt. Dabei sind die Werte auf 3 Stellen nach dem Komma gerundet.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X = k)$	0	0	0	0,001	0,005	0,015	0,037	0,074	0,12	0,16	0,176
k	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
$P(X = k)$	0,16	0,12	0,074	0,037	0,015	0,005	0,001	0	0	0	

Bemerkung: Für die Fälle  $k = 0, 1, 2$  und  $18, 19, 20$  ist die Wahrscheinlichkeit natürlich nicht Null. Die Null entsteht dadurch, dass auf drei Stellen nach den Komma gerundet wurde.

Das Histogramm einer solchen Binomialverteilung sieht wie folgt aus:



- a) Die Wahrscheinlichkeit  $P(X = 10)$  kann aus der Tabelle, bzw. aus dem Histogramm abgelesen werden.

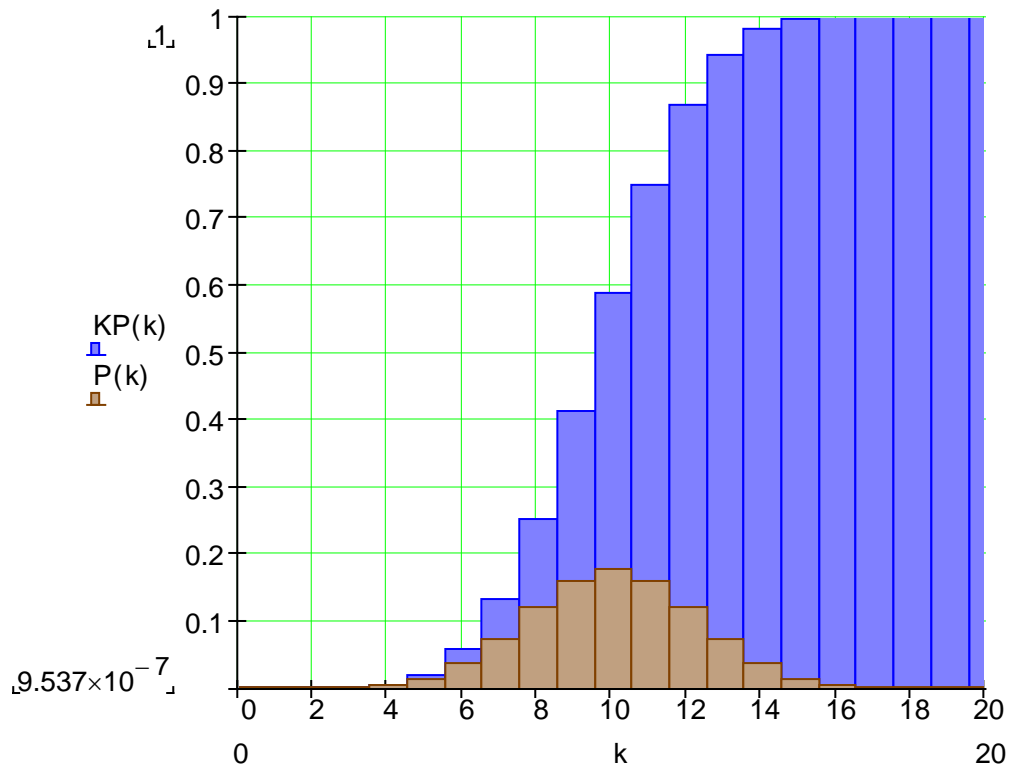
Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis 10 mal Wappen beträgt:  $P(X = 10) \approx \underline{\underline{0,176}}$

- b) Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E: Höchstens 15 mal Wappen, kann nicht unmittelbar abgelesen werden. Dazu müssen die Tabellenwerte der Wahrscheinlichkeiten aufaddiert werden.  $P(X = 0) + P(X = 1) + \dots + P(X = 15)$  Hat man jedoch eine Tabelle in der die Wahrscheinlichkeiten bereits aufaddiert wurden, also eine **kumulierte Tabelle**, dann kann man die Wahrscheinlichkeit für E daraus sofort ablesen.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X = k)$	0	0	0	0,001	0,005	0,015	0,037	0,074	0,12	0,16	0,176
$P(X \leq k)$	0	0	0	0,001	0,006	0,021	0,058	0,132	0,252	0,412	0,588
k	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
$P(X = k)$	0,16	0,12	0,074	0,037	0,015	0,005	0,001	0	0	0	
$P(X \leq k)$	0,748	0,868	0,942	0,979	0,994	0,999	1	1	1	1	

Bemerkung: Für  $k < 3$  ist die kumulierte Wahrscheinlichkeit natürlich nicht Null. Ebenso sind die Werte für  $k < 20$  auch nicht 1. Sie unterscheiden sich aber kaum noch von diesen Werten, so dass man in den meisten Fällen für praktische Berechnungen die gerundeten Tabellenwerte verwenden kann.

## Histogramm der kumulierten Binomialverteilung.



Höchstens 15 mal bedeutet  $P(X \leq 15) \approx \underline{\underline{0,994}}$

c) Mindestens 7 mal bedeutet:

$$P(X \geq 7) = P(X = 20) - P(X \leq 6) \approx 1 - 0,058 = \underline{\underline{0,942}}$$

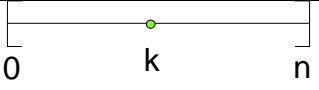
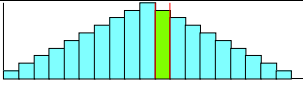

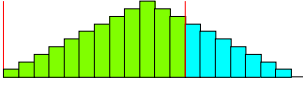

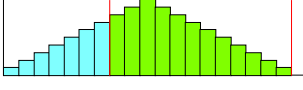
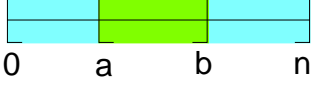
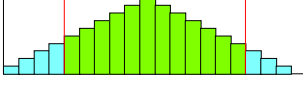
d) Mindestens 6 mal und höchstens 16 mal bedeutet:

$$P(6,7,\dots,16) = P(X \leq 16) - P(X \leq 5) \approx 0,999 - 0,021 = \underline{\underline{0,978}}$$

Das Beispiel zeigt, welchen Vorteil kumulierte Tabellen haben, wenn es darum geht, die Wahrscheinlichkeit für einen Bereich der Zufallsvariablen X zu berechnen. Diese Bereiche sind auf dem Zahlenstrahl auch als Intervalle darstellbar.



Wir unterscheiden folgende Fälle:

$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$		
$P(X \leq k) = \sum_{k=0}^a \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$		
$P(X \geq k) = \sum_{k=a}^n \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$		
$P(a \leq X \leq b) = \sum_{k=a}^b \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$		

**Übung:** Ein Multiple – Choice – Test besteht aus 50 Aufgaben mit jeweils 5 Antworten, von denen nur jeweils eine richtig ist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann man durch bloßes Raten folgende Anzahl von Aufgaben richtig beantworten?  
 a) Mehr als 20 Aufgaben      b) Mindestens 10 und höchstens 20 Aufgaben  
 c) Weniger als 10 Aufgaben    d) Genau 15 Aufgaben

Die Trefferwahrscheinlichkeit pro Aufgabe ist  $1/5 = 0,2$ . Da diese Wahrscheinlichkeit bei jeder der 50 Aufgaben besteht, kann der Vorgang als 50 stufiger Bernoulli Versuch betrachtet werden.

Der Auszug aus der kumulierten Binomialverteilung mit  $n = 50$  und  $p = 0,2$  soll als Hilfestellung genutzt werden.

k	9	10	11	14	15
$P(X \leq k)$	0,444	0,584	0,711	0,939	0,969
k	16	19	20	21	22
$P(X \leq k)$	0,986	0,999	1	1	1

**Lösung:**

a)  $P(X \geq 21) = P(X = 50) - P(X \leq 20) = 1 - 1 = \underline{\underline{0}}$   
 Die Wahrscheinlichkeit durch bloßes Raten mehr als 20 Aufgaben richtig zu beantworten ist kleiner als 0,001 (0,1%).

b)  $P(10 \leq k \leq 20) = P(X \leq 20) - P(X \leq 9) = 1 - 0,444 = \underline{\underline{0,556}}$   
 Die Wahrscheinlichkeit durch bloßes Raten mindestens 10 und höchstens 20 Aufgaben richtig zu beantworten ist 0,565 (56,5%).

c)  $P(X \leq 9) = \underline{\underline{0,444}}$  direkt aus der Tabelle ablesbar.  
 Die Wahrscheinlichkeit durch bloßes Raten weniger als 10 Aufgaben richtig zu beantworten ist 0,444 (44,4%).

d)  $P(X = 15) = P(X \leq 15) - P(X \leq 14) = 0,969 - 0,939 = \underline{\underline{0,03}}$   
 Die Wahrscheinlichkeit durch bloßes Raten genau 15 Aufgaben richtig zu beantworten ist 0,03 (3%).