Bedingte Wahrscheinlichkeit

Bei mehrmaligem Würfeln hängt die Wahrscheinlichkeit eine bestimmte Zahl zwischen 1 und 6 zu werfen nicht von dem vorherigen Ergebnis ab.
Jeder Wurf geschieht unabhängig von dem vorigen.
Werden hingegen aus einer Urne, die z.B. mehrere Kugeln mit zwei unterschiedlichen Farben enthält nacheinander Kugeln gezogen, ohne sie wieder zurückzulegen, dann ist die Wahrscheinlichkeit für ein bestimmtes Ergebnis oft von dem vorigen Ergebnis abhängig. In diesem Fall spricht man von einer bedingten Wahrscheinlichkeit.

Einführungsbeispiel:
Eine Urne enthält 100 Kugeln.
70 Kugeln bestehen aus dem Material Holz und 30 Kugeln sind aus Kunststoff.
25 der Holzkugeln sind mit der Farbe rot gestrichen und 45 sind grün.
10 der Kunststoffkugeln sind rot und 20 sind grün.
Folgende Ereignisse werden definiert:

A : Die Kugel ist aus Holz $\overline{A}$: Die Kugel ist aus Kunststoff

B : Die Kugel ist rot $\overline{B}$: Die Kugel ist grün

Die Kugeln tragen zwei Merkmale mit jeweils zwei Ausprägungen.

Merkmal I	Ausprägung	Merkmal II	Ausprägung
Material	A: Holz $\overline{A}$: Kunststoff	Farbe	B: rot $\overline{B}$: grün

Dieser Sachverhalt kann in einer Vierfeldtafel dargestellt werden:

		Merkmal II (Farbe)		
		B : rot	$\overline{B}$: grün	Summe
Merkmal I Material	A : Holz	25	45	70
	$\overline{A}$: Kunststoff	10	20	30
	Summe	35	65	100

Aus der Urne wird eine Kugel zufällig gezogen.

Mit den Daten der Tafel lassen sich direkt folgende Wahrscheinlichkeiten berechnen:

$P(A) = \frac{70}{100} = \frac{7}{10} = 0,7$ $\qquad$ $P(\overline{A}) = \frac{30}{100} = \frac{3}{10} = 0,3$

$P(B) = \frac{35}{100} = \frac{7}{20} = 0,35$ $\qquad$ $P(\overline{B}) = \frac{65}{100} = \frac{13}{20} = 0,65$

$P(A \cap B) = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} = 0,25$ $\qquad$ $P(A \cap \overline{B}) = \frac{45}{100} = \frac{9}{20} = 0,45$

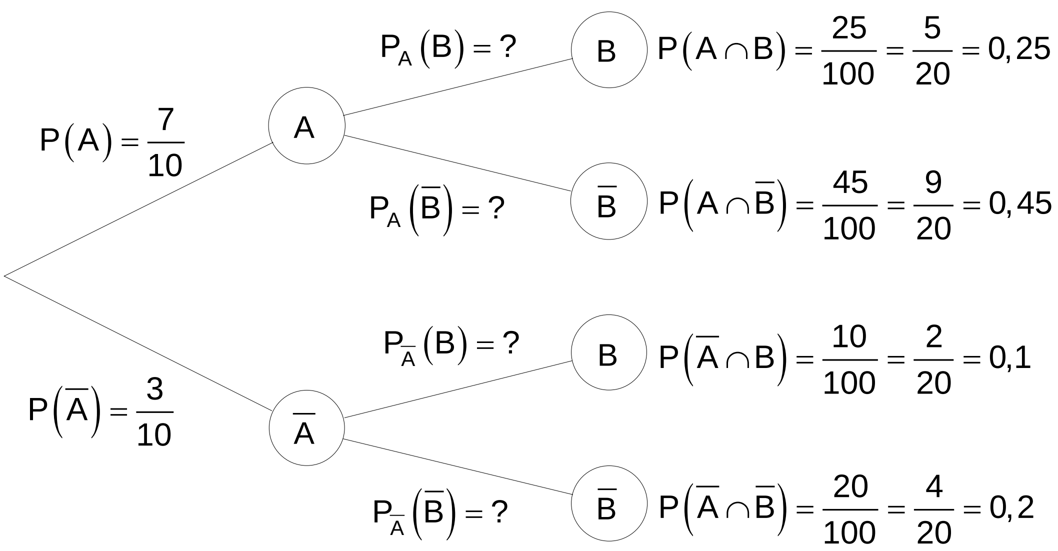
$P(\overline{A} \cap B) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10} = 0,1$ $\qquad$ $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{20}{100} = \frac{2}{10} = 0,2$

Die zugehörige Vierfeldtafel:

	B	$\overline{B}$	Summe
A	$P(A \cap B) = 0,25$	$P(A \cap \overline{B}) = 0,45$	$P(A) = 0,7$
$\overline{A}$	$P(\overline{A} \cap B) = 0,1$	$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,2$	$P(\overline{A}) = 0,3$
Summe	$P(B) = 0,35$	$P(\overline{B}) = 0,65$	1

Jemand zieht eine Kugel und spürt mit der Hand, dass es sich um eine **Kunststoffkugel** handelt.
Wie groß ist nun die Wahrscheinlichkeit dafür,
dass die Kugel in seiner Hand **grün** ist?
Das ist nicht die Wahrscheinlichkeit, mit der man eine grüne Kunststoffkugel zieht.
Aus der Vierfeldtafel lässt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit nicht ablesen.

Mit einem Ereignisbaum soll diese Frage nun geklärt werden.



Die Bezeichnung $P_A(B)$ bedeutet:

Die Wahrscheinlichkeit von B unter der Bedingung, dass A bereits eingetreten ist.
Diese Wahrscheinlichkeit heißt bedingte Wahrscheinlichkeit.

In Bezug auf die Fragestellung wird also $P_{\overline{A}}\left(\overline{B}\right)$ gesucht.

In Worten: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür eine grüne Kugel gezogen zu haben, wenn man weiß, das die gezogene Kugel aus Kunststoff ist.
Es wird nach einer Wahrscheinlichkeit gesucht, die von einer Bedingung abhängt.
In diesem Fall lautet die Bedingung: Die gezogene Kugel ist aus Kunststoff.

Um die im Baumdiagramm noch fehlenden bedingten Wahrscheinlichkeiten auszurechnen, verwendet man die Pfadmultiplikationsregel:

$$P(A)\cdot P_A(B) = P(A\cap B) \Leftrightarrow P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

Die Regel, nach der die bedingte Wahrscheinlichkeit berechnet wird, geht auf den englischen Mathematiker **Thomas Bayes** (1702 - 1761) zurück und wird daher auch **Bayes'sche Regel** oder auch **Satz von Bayes** genannt.

Sind A und B Ereignisse mit $P(A)\neq 0$ dann gilt: $P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$

$$P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{5}{20} : \frac{7}{10} = \frac{5\cdot 10}{7\cdot 20} = \frac{5}{14} \approx 0{,}36$$

$$P_A\left(\overline{B}\right) = \frac{P\left(A\cap \overline{B}\right)}{P(A)} = \frac{9}{20} : \frac{7}{10} = \frac{9\cdot 10}{7\cdot 20} = \frac{9}{14} \approx 0{,}64$$

$$P_{\overline{A}}(B) = \frac{P\left(\overline{A}\cap B\right)}{P\left(\overline{A}\right)} = \frac{2}{20} : \frac{3}{10} = \frac{2\cdot 10}{3\cdot 20} = \frac{1}{3} = 0{,}\overline{3}$$

$$P_{\overline{A}}\left(\overline{B}\right) = \frac{P\left(\overline{A}\cap \overline{B}\right)}{P\left(\overline{A}\right)} = \frac{4}{20} : \frac{3}{10} = \frac{4\cdot 10}{3\cdot 20} = \frac{2}{3} = 0{,}\overline{6}$$

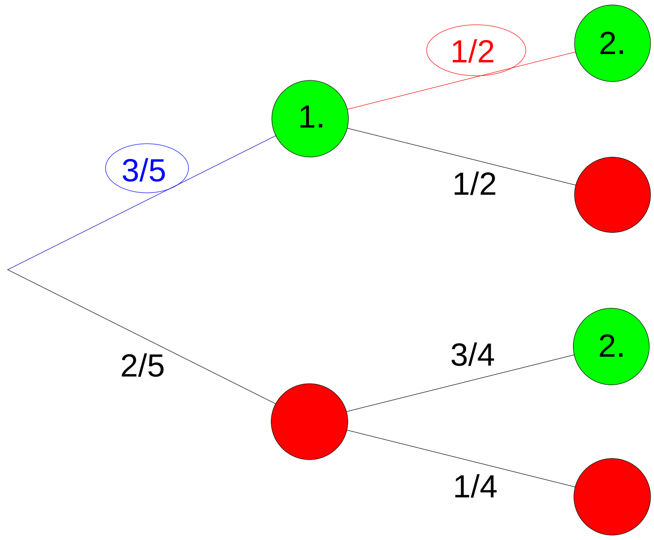
Wenn man also weiß, dass die gezogene Kugel aus Kunststoff besteht, dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie die Farbe grün hat: 2/3.
Die Wahrscheinlichkeit eine grüne Kunststoffkugel zu ziehen ist hingegen 0,2.

Ein etwas anderer Zugang:

Eine Urne enthält 3 grüne und 2 rote Kugeln.
Zwei Kugeln werden nacheinander ohne Zurücklegen gezogen.
Es werden vier Ereignisse definiert:
A: Grün wird im 1. Zug gezogen
B: Grün wird im 2. Zug gezogen.
C: Grün wird im ersten und zweiten Zug gezogen.
D: Grün im zweiten Zug unter der Bedingung, dass grün bereits im ersten Zug gezogen wurde.

Zu bestimmen sind die Wahrscheinlichkeiten aller Ereignisse.

Ein Baumdiagramm mit den Pfadwahrscheinlichkeiten veranschaulicht den Zusammenhang.



$$P(gg) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{10} = 0{,}3$$

$$P(gr) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{10} = 0{,}3$$

$$P(rg) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{10} = 0{,}3$$

$$P(rr) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10} = 0{,}1$$

Dem Baumdiagramm sind folgende Ergebnisse zu entnehmen:

Grün im 1. Zug: $P(A) = 3/5 = 0{,}6$ und

Grün im 2. Zug: $P(B) = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} = 0{,}6$

Für grün im 1. Zug und grün im 2. Zug erhält man mit der

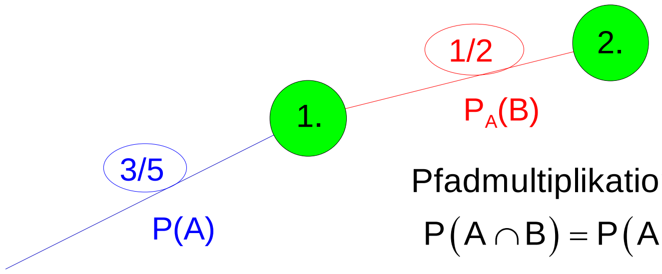
Pfadmultiplikationsregel $P(C) = P(A \cap B) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{3}{10}}}$

$P(D) = \frac{1}{2}$ wird abgelesen.

Der Wert von P(D) wurde wie folgt ermittelt:
Unter der Voraussetzung (Bedingung) dass im 1. Zug grün gezogen wurde weiß man, dass noch 2 grüne und 2 rote Kugeln in der Urne sind.
Die Wahrscheinlichkeit für grün im 2. Zug ist dann 1/2.
Für die Wahrscheinlichkeit von D (grün im 2. Zug) unter der Voraussetzung dass A (grün im 1. Zug) schon eingetreten ist, wählt man die Bezeichnung $P(D) = P_A(B)$.

Im dargestellten Fall gilt: $P_A(B) = \frac{1}{2} \qquad \left(\neq P(B) = \frac{3}{5} \right)$

Für eine weitere Untersuchung dient der Ausschnitt aus dem Pfaddiagramm, in dem $P_A(B)$ vorkommt.



$P(A \cap B) = \frac{3}{10}$

Pfadmultiplikationsregel:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)$

Ist nach der Wahrscheinlichkeit $P_A(B)$ gefragt, so kann obige Gleichung wie folgt umgeformt werden:

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \qquad \text{für } P(A) \neq 0$$

$P_A(B)$ ist die Wahrscheinlichkeit von B unter der Bedingung, dass A bereits eingetreten ist.
Wir überprüfen dieses Gesetz mit den vorliegenden Ergebnissen:

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= \frac{3}{10} \\ P(A) &= \frac{3}{5} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{3}{5}} = \frac{3 \cdot 5}{3 \cdot 10} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

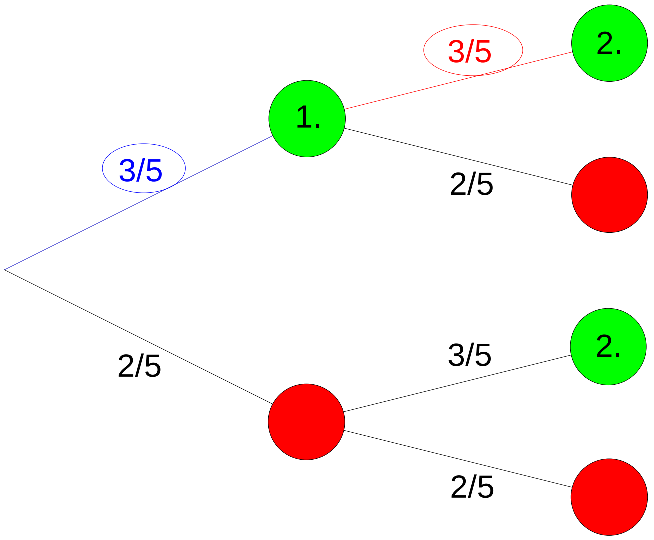
Aus dem Urnenversuch (mehrfaches ziehen ohne zurücklegen) geht klar hervor, das die Wahrscheinlichkeiten für die jeweils nächste Ziehung von der vorigen abhängt.
In einem solchen Fall sagt man, die Ereignisse sind voneinander abhängig.

Unabhängigkeit von Ereignissen

Bei einem Urnenversuch (mehrfaches ziehen mit Zurücklegen), wird die Anfangsbedingung immer wieder hergestellt, so dass die Wahrscheinlichkeit für die jeweils nächste Ziehung gleich ist, wie bei der ersten.
In einem solchen Fall sagt man, die Ereignisse sind voneinander unabhängig.

Eine Urne enthält 3 grüne und 2 rote Kugeln. Zwei Kugeln werden nacheinander mit Zurücklegen gezogen.
Es werden vier Ereignisse definiert:
A: Grün wird im 1. Zug gezogen
B: Grün wird im 2. Zug gezogen.
C: Grün wird im ersten und zweiten Zug gezogen.
D: Grün im zweiten Zug unter der Bedingung, dass grün bereits im ersten Zug gezogen wurde.

Das Baumdiagramm mit den zugehörigen Pfadwahrscheinlichkeiten:



$P(gg)=\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{9}{25}=0{,}36$

$P(gr)=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{6}{25}=0{,}24$

$P(rg)=\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{6}{25}=0{,}24$

$P(rr)=\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{4}{25}=0{,}16$

Dem Baumdiagramm ist zu entnehmen:
Grün im 1. Zug: $P(A)=3/5=0{,}6$

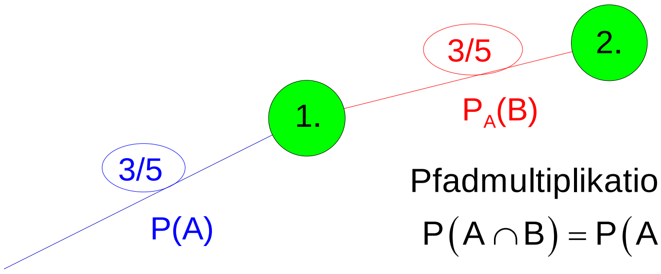
Grün im 2. Zug: $P(B)=\frac{9}{25}+\frac{6}{25}=\frac{15}{25}=\frac{3}{5}=0{,}6$

Für Grün im 1. Zug und grün im 2. Zug erhält man mit der Pfadmultiplikationsregel $P(C)=P(A\cap B)=\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}=\underline{\underline{\frac{9}{25}}}$

$P(D)=\frac{3}{5}$ wird abgelesen.

Die Wahrscheinlichkeit eine grüne Kugel zu ziehen bleibt immer gleich, da nach jedem Zug durch Zurücklegen der Kugel, die Ausgangssituation wieder hergestellt wird.
Die Wahrscheinlichkeit für grün im 2. Zug unter der Bedingung, das grün im 1. Zug bereits gezogen wurde ist $P(D) = P_A(B)$.

Ein Ausschnitt aus dem Baumdiagramm:



$$P(A \cap B) = \frac{9}{25}$$

Pfadmultiplikationsregel:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)$$

Eine Auflistung der Ergebnisse ergibt:

$$P(A) = \frac{3}{5} \qquad P_A(B) = \frac{3}{5} \qquad P(B) = \frac{3}{5}$$

es ist also $P_A(B) = P(B)$

Damit gilt mit der Pfadmultiplikationsregel:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Gilt $P_A(B) = P(B)$, so beeinflusst das Eintreten des Ereignisses A die Wahrscheinlichkeit von B nicht. Man sagt, die Ereignisse A und B sind unabhängig voneinander.

Unabhängige Ereignisse	Das Ereignis B heißt unabhängig vom Ereignis A, wenn das Eintreten von A die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von B nicht beeinflusst. Es gilt: $P_A(B) = P(B)$ mit $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ Beispiel: Urnenziehung mit Zurücklegen.

Merke:	Für den Nachweis der Unabhängigkeit zweier Ereignisse A und B geht man wie folgt vor: Man berechnet $P(A); P(B)$ und $P(A \cap B)$ Gilt: $P_A(B) = P(B)$ mit $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$, dann sind die Ereignisse A und B voneinander unabhängig, anderenfalls sind die Ereignisse A und B voneinander abhängig. Im Baumdiagramm erkennt man die Unabhängigkeit von Ereignissen daran, dass in der 2. Stufe die Teilbäume gleich sind. Sind sie hingegen verschieden, dann sind die Ereignisse voneinander abhängig.

Beispiel
Die Seitenflächen eines idealen Würfels werden wie folgt eingefärbt.
Zwei Seitenflächen mit der Farbe **rot** und zwei mit der Farbe **grün**.
Eine Seitenfläche mit der Farbe **schwarz** und eine mit der Farbe **blau**.
Der Würfel wird zweimal geworfen.
Folgende Ereignisse werden definiert:
A: Beim ersten Wurf erscheint die Farbe **rot** oder **schwarz**.
B: Beim zweiten Wurf erscheint die Farbe **grün** oder **blau**.
Untersuchen Sie, ob die Ereignisse A und B voneinander unabhängig sind.

Vorüberlegung: $P(r)=P(g)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ und $P(s)=P(b)=\frac{1}{6}$

Berechnung von $P(A);P(B)$ und $P(A\cap B)$

$A=\{(rx);(sx)\}$ mit $x=\text{beliebig}\Rightarrow P(A)=P(r)+P(s)=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$

$B=\{(xg);(xb)\}$ mit $x=\text{beliebig}\Rightarrow P(B)=P(g)+P(b)=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$

$A\cap B=\{(rg);(rb);(sg);(sb)\}\Rightarrow P(A\cap B)=P(rg)+P(rb)+P(sg)+P(sb)$

$$=\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}+\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{4}{36}+\frac{2}{36}+\frac{2}{36}+\frac{1}{36}=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$$

Ergebnisse: $P(A)=\frac{1}{2};P(B)=\frac{1}{2};P(A\cap B)=\frac{1}{4}$

Zwei Ereignisse A und B sind unabhängig voneinander, wenn gilt:

$P_A(B)=P(B)$	$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$ $P(B)=\frac{1}{2}$	$\Rightarrow P_A(B)=P(B)=\frac{1}{2}$ Unabhängigkeit

Die Ereignisse A und B sind unabhängig voneinander.

Die Zusammenhänge sollen nun an einer 4- Feldtafel und dem zugehörigen Baumdiagramm näher betrachtet werden. Bekannt sind:

$P(A)=\frac{1}{2}$; $P(B)=\frac{1}{2}$; $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$

Daraus lassen sich die restlichen Werte für die 4- Feldtafel berechnen.

	B	$\overline{B}$	Summe
A	$P(A\cap B)=\frac{1}{4}$	$P(A\cap\overline{B})=\frac{1}{4}$	$P(A)=\frac{1}{2}$
$\overline{A}$	$P(\overline{A}\cap B)=\frac{1}{4}$	$P(\overline{A}\cap\overline{B})=\frac{1}{4}$	$P(\overline{A})=\frac{1}{2}$
Summe	$P(B)=\frac{1}{2}$	$P(\overline{B})=\frac{1}{2}$	1

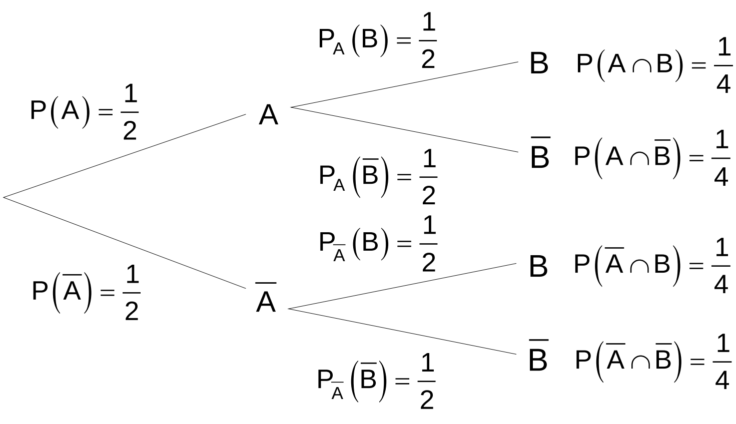
Für das Baumdiagramm werden nun alle bedingten Wahrscheinlichkeiten benötigt, die sich leicht mit den Werten der 4- Feldtafel berechnen lassen.

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{4} : \frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 2}{4 \cdot 1} = \frac{1}{2}$$

$$P_A(\overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(A)} = \frac{1}{4} : \frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 2}{4 \cdot 1} = \frac{1}{2}$$

$$P_{\overline{A}}(B) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(\overline{A})} = \frac{1}{4} : \frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 2}{4 \cdot 1} = \frac{1}{2}$$

$$P_{\overline{A}}(\overline{B}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{A})} = \frac{1}{4} : \frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 2}{4 \cdot 1} = \frac{1}{2}$$



Der Vergleich mit der 4- Feldtafel zeigt, dass alle Ereignisse **unabhängig** voneinander sind, denn es gilt.

$$P_A(B) = P(B) = \frac{1}{2} \;;\; P_{\overline{A}}(B) = P(B) = \frac{1}{2}$$

$$P_A(\overline{B}) = P(\overline{B}) = \frac{1}{2} \;;\; P_{\overline{A}}(\overline{B}) = P(\overline{B}) = \frac{1}{2}$$

Man erkennt die Unabhängigkeit der Ereignisse voneinander auch daran, dass in der 2. Stufe des Baumdiagramms die Teilbäume gleich sind.

Beispiel

Ein Würfel in Form einer dreieckigen Pyramide hat 4 gleich große Flächen mit den Zahlen 1 ; 2 ; 3; 4 (4rer- Würfel).
Der Würfel wird zweimal geworfen.
Folgende Ereignisse werden definiert:
A: Beim 1. Wurf erscheint die Zahl **1** oder **2** und beim 2. Wurf die Zahl **1** ; **2** oder **4**.
B: Die Zahl beim 2. Wurf ist eine andere als beim 1. Wurf.
Untersuchen Sie, ob die Ereignisse A und B voneinander unabhängig sind.

Vorüberlegung: $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = \frac{1}{4}$

Berechnung von $P(A);P(B)$ und $P(A \cap B)$

$$A = \{(1|1);(1|2);(1|4);(2|1);(2|2);(2|4)\} \Rightarrow P(A) = 6 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

$$B = \{(1|2);(1|3);(1|4);(2|1);(2|3);(2|4);(3|1);(3|2);(3|4);(4|1);(4|2);(4|3)\}$$

$$\Rightarrow P(B) = 12 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$A \cap B = \{(1|2);(1|4);(2|1);(2|4)\} \Rightarrow P(A \cap B) = 4 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$$

Ergebnisse: $P(A) = \frac{3}{8};P(B) = \frac{3}{4};P(A \cap B) = \frac{1}{4}$

Zwei Ereignisse A und B sind unabhängig voneinander, wenn gilt:

$P_A(B)=P(B)$	$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{8}}=\frac{2}{3}$ $P(B)=\frac{3}{4}$	$\Rightarrow P_A(B)=\frac{2}{3}\neq P(B)=\frac{3}{4}$ Abhängigkeit

Die Ereignisse A und B sind voneinander abhängig.

Die Zusammenhänge sollen nun an einer 4- Feldtafel und dem zugehörigen Baumdiagramm näher betrachtet werden. Bekannt sind:

$P(A)=\frac{3}{8}\ ;\ P(B)=\frac{3}{4}=\frac{6}{8}\ ;\ P(A\cap B)=\frac{1}{4}=\frac{2}{8}$

Daraus lassen sich die restlichen Werte für die 4- Feldtafel berechnen.

	B	$\overline{B}$	Summe
A	$P(A\cap B)=\frac{2}{8}$	$P(A\cap\overline{B})=\frac{1}{8}$	$P(A)=\frac{3}{8}$
$\overline{A}$	$P(\overline{A}\cap B)=\frac{4}{8}$	$P(\overline{A}\cap\overline{B})=\frac{1}{8}$	$P(\overline{A})=\frac{5}{8}$
Summe	$P(B)=\frac{6}{8}$	$P(\overline{B})=\frac{2}{8}$	1

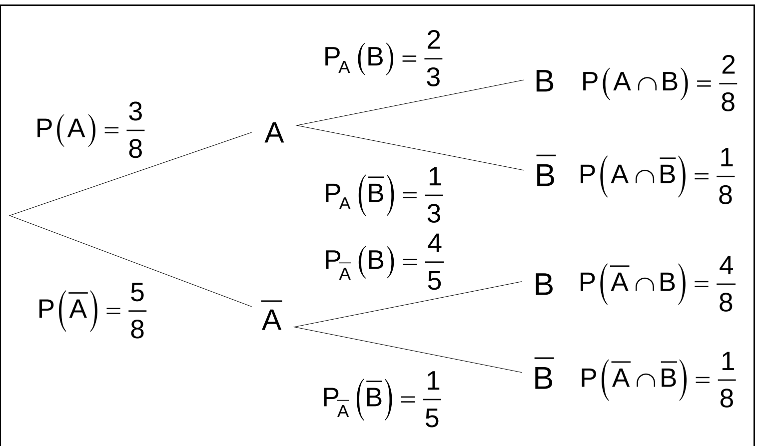
Für das Baumdiagramm werden nun alle bedingten Wahrscheinlichkeiten benötigt, die sich leicht mit den Werten der 4- Feldtafel berechnen lassen lassen.

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{2}{8}:\frac{3}{8}=\frac{2\cdot 8}{3\cdot 8}=\frac{2}{3}$$

$$P_A(\overline{B})=\frac{P(A\cap\overline{B})}{P(A)}=\frac{1}{8}:\frac{3}{8}=\frac{1\cdot 8}{3\cdot 8}=\frac{1}{3}$$

$$P_{\overline{A}}(B)=\frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(\overline{A})}=\frac{4}{8}:\frac{5}{8}=\frac{4\cdot 8}{5\cdot 8}=\frac{4}{5}$$

$$P_{\overline{A}}(\overline{B})=\frac{P(\overline{A}\cap\overline{B})}{P(\overline{A})}=\frac{1}{8}:\frac{5}{8}=\frac{1\cdot 8}{5\cdot 8}=\frac{1}{5}$$



Der Vergleich mit der 4- Feldtafel zeigt, dass alle Ereignisse **abhängig** voneinander sind, denn es gilt.

$P_A(B)=\frac{2}{3}\neq P(B)=\frac{6}{8}\ ;\ P_{\overline{A}}(B)=\frac{4}{5}\neq P(B)=\frac{6}{8}$ $P_A(\overline{B})=\frac{1}{3}\neq P(\overline{B})=\frac{2}{8}\ ;\ P_{\overline{A}}(\overline{B})=\frac{1}{5}\neq P(\overline{B})=\frac{2}{8}$	Man erkennt die Abhängigkeit der Ereignisse voneinander auch daran, dass in der 2. Stufe des Baumdiagramms die Teilbäume ungleich sind.

Beispiel

Eine Umfrage an Schulen über die Essgewohnheiten der Schüler hat ergeben, dass 45% aller Schüler gerne Schokolade essen. 55% aller Schüler ziehen andere Süßigkeiten vor. 60% aller Schüler gaben an Geschwister zu haben. 27% der Schüler haben Geschwister und essen gerne Schokolade.

Ein Schokoladenhersteller interessiert sich dafür, ob Schüler mit Geschwister eine besondere Vorliebe für Schokolade haben.
Anders ausgedrückt: Hat die Tatsache, das ein Schüler Geschwister hat, einen Einfluss auf seine Vorliebe für Schokolade?

Die Erhebungsdaten lassen sich in einer Vierfeldtafel darstellen:

	B	$\overline{B}$	Summe
A	$P(A\cap B)=0{,}27$	$P(A\cap\overline{B})=0{,}33$	$P(A)=0{,}6$
$\overline{A}$	$P(\overline{A}\cap B)=0{,}18$	$P(\overline{A}\cap\overline{B})=0{,}22$	$P(\overline{A})=0{,}4$
Summe	$P(B)=0{,}45$	$P(\overline{B})=0{,}55$	1

Die zugehörigen Ereignisse sind:
A: Der Schüler hat Geschwister. B: Der Schüler isst gerne Schokolade.

Überprüfung auf Abhängigkeit:

$$\left.\begin{array}{l} P(A)=0{,}6 \\ P(B)=0{,}45 \\ P(A\cap B)=0{,}27 \end{array}\right| \Rightarrow P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0{,}27}{0{,}6}=0{,}45=P(B)$$

Die Ereignisse sind unabhängig voneinander.
Das Bedeutet, ob ein Schüler Geschwister hat oder nicht, hat keinen Einfluss auf seine Vorliebe für Schokolade.

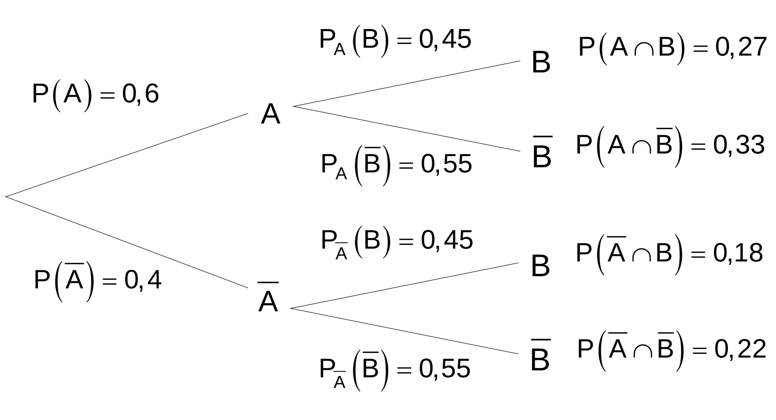
Die Zusammenhänge sollen nun an dem zugehörigen Baumdiagramm näher betrachtet werden.
Für das Baumdiagramm werden nun alle bedingten Wahrscheinlichkeiten benötigt, die sich leicht mit den Werten der 4- Feldtafel berechnen lassen lassen.

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0{,}27}{0{,}6}=0{,}45$$

$$P_A(\overline{B})=\frac{P(A\cap\overline{B})}{P(A)}=\frac{0{,}33}{0{,}6}=0{,}55$$

$$P_{\overline{A}}(B)=\frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(\overline{A})}=\frac{0{,}18}{0{,}4}=0{,}45$$

$$P_{\overline{A}}(\overline{B})=\frac{P(\overline{A}\cap\overline{B})}{P(\overline{A})}=\frac{0{,}22}{0{,}4}=0{,}55$$



Der Vergleich mit der 4- Feldtafel zeigt, dass alle Ereignisse **unabhängig** voneinander sind, denn es gilt.

$P_A(B) = P(B) = 0,45$; $P_{\overline{A}}(B) = P(B) = 0,45$ $P_A(\overline{B}) = P(\overline{B}) = 0,55$; $P_{\overline{A}}(\overline{B}) = P(\overline{B}) = 0,55$	Man erkennt die Unabhängigkeit der Ereignisse voneinander auch daran, dass in der 2. Stufe des Baumdiagramms die Teilbäume gleich sind.

Beispiel mit inversen Baum

Ein Berufskolleg hat 1000 Schüler. Die folgende Vierfeldtafel gibt Aufschluss darüber, wie die Handys auf die Schüler verteilt sind.

	B : Weiblich	$\overline{B}$: Männlich	Summe
A : besitzt ein Handy	410	397	807
$\overline{A}$: besitzt kein Handy	114	79	193
Summe	524	476	1000

a)	Berechnen Sie die relativen Häufigkeiten und tragen sie diese in eine neue Vierfeldtafel ein.	
b)	Benutzen Sie den Zusammenhang zwischen einer Vierfeldtafel und den Baumdiagrammen um die Bäume zu zeichnen.	
c)	Berechnen Sie alle bedingten Wahrscheinlichkeiten und tragen Sie diese in die Baumdiagramme ein.	
d)	Aus der Gesamtheit aller Schüler wird einer zufällig ausgewählt.	
	1.	Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat die Person kein Handy?
	2.	Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Person weiblich?
	3.	Falls eine ausgewählte Person kein Handy hat, mit welcher Wahrscheinlichkeit ist sie männlich?
	4.	Falls eine ausgewählte Person weiblich ist, mit welcher Wahrscheinlichkeit hat sie ein Handy?
	5.	Besteht ein Zusammenhang zwischen Geschlecht und Handybesitz?

a)		B : Weiblich	$\overline{B}$: Männlich	Summe
	A : besitzt ein Handy	0,410	0,397	0,807
	$\overline{A}$: besitzt kein Handy	0,114	0,079	0,193
	Summe	0,524	0,476	1

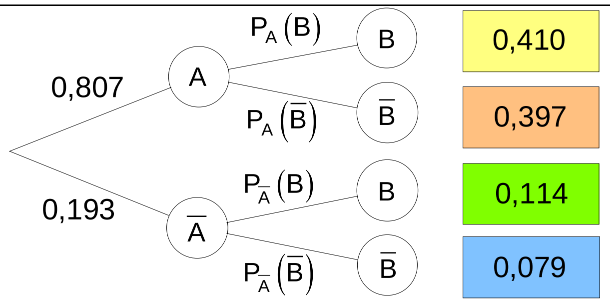
b)

A: Schüler besitzt ein Handy

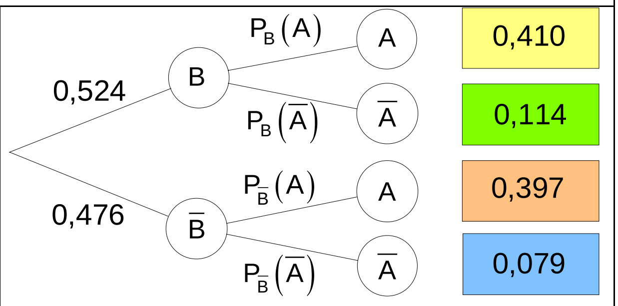
B: Schüler ist weiblich

$\bar{A}$: Schüler besitzt kein Handy

$\bar{B}$: Schüler ist männlich



1. Merkmal: Handybesitz | 2. Merkmal: Geschlecht | Pfadwahrscheinlichkeiten



1. Merkmal: Geschlecht | 2. Merkmal: Handybesitz | Pfadwahrscheinlichkeiten

c) Berechnung der bedingten Wahrscheinlichkeiten

	B	$\bar{B}$	Summe
A	$P(A \cap B) = 0{,}410$	$P(A \cap \bar{B}) = 0{,}397$	$P(A) = 0{,}807$
$\bar{A}$	$P(\bar{A} \cap B) = 0{,}114$	$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0{,}079$	$P(\bar{A}) = 0{,}193$
Summe	$P(B) = 0{,}524$	$P(\bar{B}) = 0{,}476$	1

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}410}{0{,}807} \approx 0{,}508$$

$$P_A(\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(A)} = \frac{0{,}397}{0{,}807} \approx 0{,}492$$

$$P_{\bar{A}}(B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(\bar{A})} = \frac{0{,}114}{0{,}193} \approx 0{,}591$$

$$P_{\bar{A}}(\bar{B}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{A})} = \frac{0{,}079}{0{,}193} \approx 0{,}409$$

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}410}{0{,}524} \approx 0{,}782$$

$$P_B(\bar{A}) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}114}{0{,}524} \approx 0{,}218$$

$$P_{\bar{B}}(A) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{0{,}397}{0{,}476} \approx 0{,}834$$

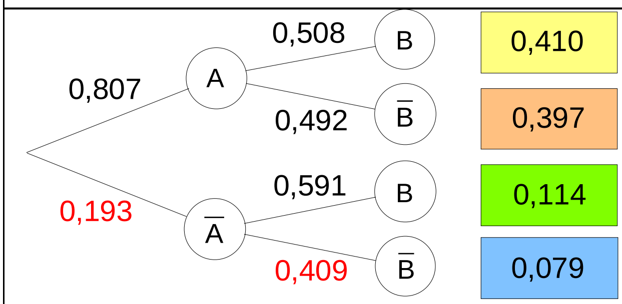
$$P_{\bar{B}}(\bar{A}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{0{,}079}{0{,}476} \approx 0{,}166$$

A: Schüler besitzt ein Handy

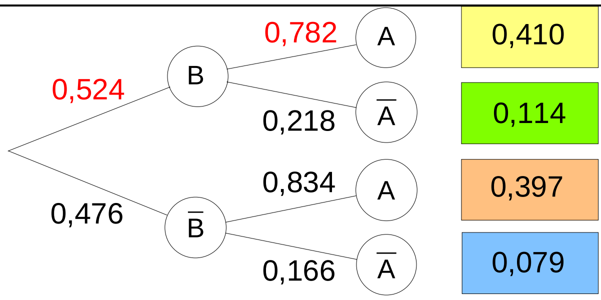
B: Schüler ist weiblich

$\bar{A}$: Schüler besitzt kein Handy

$\bar{B}$: Schüler ist männlich



1. Merkmal: Handybesitz | 2. Merkmal: Geschlecht | Pfadwahrscheinlichkeiten



1. Merkmal: Geschlecht | 2. Merkmal: Handybesitz | Pfadwahrscheinlichkeiten

<table>
<tr><td rowspan="6">d)</td><td colspan="3">Die gesuchten Wahrscheinlichkeiten können nun direkt aus den Baumdiagrammen abgelesen werden.</td></tr>
<tr><td>1.</td><td>$P(\overline{A}) = 0{,}193$</td><td>Eine zufällig ausgewählte Person hat mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,193 kein Handy.</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>$P(B) = 0{,}524$</td><td>Eine zufällig ausgewählte Person ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,524 weiblich.</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>$P_{\overline{A}}(\overline{B}) = 0{,}409$</td><td>Eine zufällig ausgewählte Person, von der man weiß, dass sie kein Handy hat, ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,409 männlich.</td></tr>
<tr><td>4.</td><td>$P_B(A) = 0{,}782$</td><td>Eine zufällig ausgewählte Person, von der man weiß, dass sie weiblich ist, hat mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,782 ein Handy.</td></tr>
<tr><td>5.</td><td colspan="2">Überprüfung auf Abhängigkeit.
(Zusammenhang zwischen Geschlecht und Handybesitz)

Das Ereignis B ist unabhängig vom Ereignis A falls gilt: $P_A(B) = P(B)$
Anderenfalls sind die Ereignisse voneinander abhängig.
Mit den bereits vorliegenden Ergebnissen lässt sich zeigen:

$P_B(A) \approx 0{,}782 \neq P(A) = 0{,}807 \quad P_{\overline{B}}(A) \approx 0{,}834 \neq P(A) = 0{,}807$
$P_B(\overline{A}) \approx 0{,}218 \neq P(\overline{A}) = 0{,}193 \quad P_{\overline{B}}(\overline{A}) \approx 0{,}166 \neq P(\overline{A}) = 0{,}193$

Das bedeutet, in allen Fällen besteht eine Abhängigkeit zwischen Geschlecht und dem Handybesitz.</td></tr>
</table>

Aus den Baumdiagrammen lässt sich die Abhängigkeit der Ereignisse direkt ablesen, denn die Teilbäume der 2. Stufe sind verschieden.
Hat man den Zusammenhang einer Vierfeldtafel mit den Baumdiagrammen begriffen, dann lassen sich solche Aufgaben auch mit weniger Aufwand lösen.
Das soll nun folgendes Beispiel zeigen.

Beispiel:
Viele Internetnutzer klagen über Spam- Mails.
Nehmen wir an, in 1% der guten und 40% der Spam- Mails komme das Wort ” Viagra“ vor.
Außerdem seien 10% der Mails gut und 90% Spam.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Mail, von der man weiß, das in ihr das Wort ”Viagra“ vorkommt, eine Spam- Mail ist.?
Ereignisse :

A : Mail enthält das Wort Viagra $\quad \overline{A}$: Mail enthält nicht das Wort Viagra
B : Spam-Mail $\quad \overline{B}$: gute Mail

1. Aufstellen der Vierfeldtafel mit den vorgegebenen Daten.
   Die % Werte entsprechen relativen Häufigkeiten (Wahrscheinlichkeiten)
   90 % Spam bedutet Summe Spam = 0,9
   10% gute Mails bedeutet Summe gute Mails = 0,1
   40% der Spam-Mails mit Viagra bedeutet 0,9 x 0,4 = 0,36
   1% der guten Mails mit Viagra bedeutet =0,1 x 0,01 = 0,001
   Die restliche Werte kann man ausrechnen, da die Summen bekannt sind.

	$B:$ Spam-Mail	$\overline{B}:$ Gute Mail	Summe
$A:$ mit Viagra	0,36	0,001	
$\overline{A}:$ ohne Viagra			
Summe	0,9	0,1	1

Spam ohne Viagra: 0,9 – 0,36 = 0,54
Gute Mail ohne Viagra: 0,1 – 0,001 = 0,099
Summe aller Mails mit Viagra: 0,36 + 0,001 = 0,361
Summe aller Mails ohne Viagra: 0,54 + 0,099 = 0,639

Mit diesen Werten wird die Vierfeldtafel nun vervollständigt.

	$B:$ Spam-Mail	$\overline{B}:$ Gute Mail	Summe
$A:$ mit Viagra	0,36	0,001	0,361
$\overline{A}:$ ohne Viagra	0,54	0,099	0,639
Summe	0,9	0,1	1

Die Aufgabenstellung lautete:
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Mail, in der ”Viagra“ steht, Spam ist?
Gesucht ist also die Wahrscheinlichkeit von B unter der Bedingung, dass A eingetreten ist.

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

mit $P(A \cap B) = 0{,}36$ und $P(A) = 0{,}361$ ist $P_A(B) = \frac{0{,}36}{0{,}361} \approx \underline{\underline{0{,}997}}$

Das bedeutet, in 99,7% aller Fälle ist eine Mail, von der man weiß, das in ihr das Wort Viagra steht, eine Spam- Mail.

Übung: Die Tabelle zeigt Frauen und Männer einer Firma, unterteilt nach Raucher und Nichtraucher.

	$B:$ Frauen	$\overline{B}:$ Männer	Summe
$A:$ Raucher	200	800	1000
$\overline{A}:$ Nichtraucher	300	200	500
Summe	500	1000	1500

a)	Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, eine Person anzutreffen, die Raucher ist.
b)	Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit eine Frau anzutreffen.
c)	Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit eine Raucherin anzutreffen.
d)	Sie Treffen eine Frau an, mit welcher Wahrscheinlichkeit ist sie Raucherin?
e)	Überprüfen Sie, ob die Ereignisse A und B voneinander abhängig sind.

Lösung: Um die Wahrscheinlichkeiten bestimmen zu können, benötigen wir die relativen Häufigkeiten der Ereignisse. Im vorigen Beispiel gab es Rundungsfehler. Um diese möglicht zu vermeiden, sollte man die relativen Häufigkeiten und die dazugehörigen Wahrscheinlichkeiten in Bruchform darstellen.

	B : Frauen	$\overline{B}$: Männer	Summe
A : Raucher	$\frac{200}{1500}=\frac{2}{15}$	$\frac{800}{1500}=\frac{8}{15}$	$\frac{1000}{1500}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$
$\overline{A}$: Nichtraucher	$\frac{300}{1500}=\frac{3}{15}$	$\frac{200}{1500}=\frac{2}{15}$	$\frac{500}{1500}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$
Summe	$\frac{500}{1500}=\frac{5}{15}$	$\frac{1000}{1500}=\frac{10}{15}$	$\frac{1500}{1500}=\frac{15}{15}=1$

a)	Die Wahrscheinlichkeit dafür, eine Person anzutreffen, die Raucher ist, beträgt $P(A)=\frac{2}{3}\approx 0{,}666$
b)	Die Wahrscheinlichkeit dafür, eine Frau anzutreffen, beträgt $P(B)=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}\approx 0{,}333$
c)	Die Wahrscheinlichkeit dafür, eine Raucherin anzutreffen, beträgt $P(A\cap B)=\frac{2}{15}\approx 0{,}133$
d)	Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine angetroffene Frau Raucherin ist, beträgt $P_B(A)=\frac{P(B\cap A)}{P(B)}=\frac{\frac{2}{15}}{\frac{5}{15}}=\frac{2}{5}=0{,}4$
e)	Zwei Ereignisse A und B sind unabhängig voneinander, wenn gilt: $P_A(B)=P(B)$; $P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{15}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{5}$; $P(B)=\frac{1}{3}$; $\Rightarrow P_A(B)=\frac{1}{5}\neq P(B)=\frac{1}{3}$ Abhängigkeit Die Ereignisse A und B sind voneinander abhängig.

Zusammenfassung:

Bedingte Wahrscheinlichkeit Der Satz Von Bayes	Für die Wahrscheinlichkeit des Eintretens des Ereignisses B unter der Bedingung, dass das Ereignis A bereits eingetreten ist, gilt: $P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$

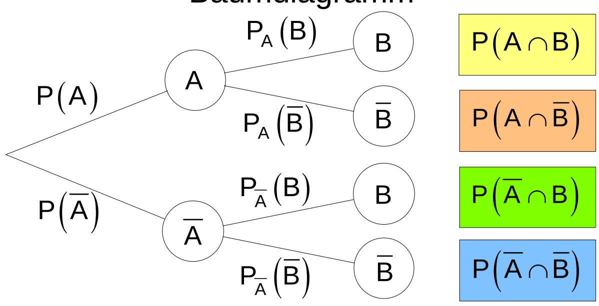
Unabhängige Ereignisse	Das Ereignis B heißt unabhängig vom Ereignis A, wenn das Eintreten von A die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von B nicht beeinflusst. Es gilt: $P_A(B)=P(B)$ mit $P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$

Zusammenhang zwischen Vierfeldtafel und Baumdiagramm

Vierfeldtafel

	B	$\overline{B}$	$\sum$
A	$P(A\cap B)$	$P(A\cap \overline{B})$	$P(A)$
$\overline{A}$	$P(\overline{A}\cap B)$	$P(\overline{A}\cap \overline{B})$	$P(\overline{A})$
$\sum$	$P(B)$	$P(\overline{B})$	1

Baumdiagramm

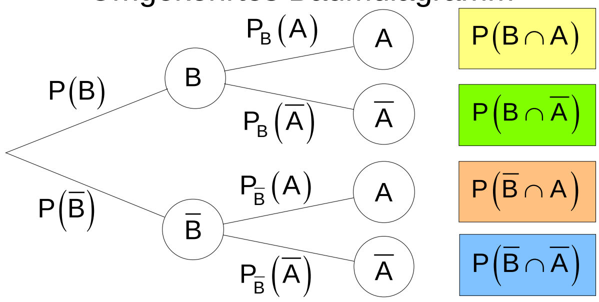


Vertauscht man bei einem Baumdiagramm die Reihenfolge der betrachteten Ereignisse, dann erhält man das **umgekehrte** oder **inverse** Baumdiagramm. Die Wahrscheinlichkeiten an den Pfadenden stimmen in beiden Baumdiagrammen bis auf die Reihenfolge überein. Die Pfadwahrscheinlichkeiten und damit auch die bedingten Wahrscheinlichkeiten unterscheiden sich im Allgemeinen voneinander. Sie beziehen sich auf verschiedene Ereignisse und daher auch auf verschiedene Teilgesamtheiten.
Beachten Sie aber: Es gilt stets $P(A\cap B)=P(B\cap A)$.

Umgekehrte Vierfeldtafel

	A	$\overline{A}$	$\sum$
B	$P(B\cap A)$	$P(B\cap \overline{A})$	$P(B)$
$\overline{B}$	$P(\overline{B}\cap A)$	$P(\overline{B}\cap \overline{A})$	$P(\overline{B})$
$\sum$	$P(A)$	$P(\overline{A})$	1

Umgekehrtes Baumdiagramm



Vierfeldtafel und Baumdiagramm bei stochastischer Unabhängigkeit

Bei stochastisch unabhängigen Ereignissen A und B steht im ersten Feld der Vierfeldtafel für $P(A\cap B)$ das Produkt $P(A)\cdot P(B)$.
Für die weiteren Felder gilt entsprechend einer Multiplikationstabelle ähnliches.
Im Baumdiagramm erkennt man die Unabhängigkeit von Ereignissen daran, dass in der 2. Stufe die Teilbäume gleich sind.

Vierfeldtafel

	B	$\overline{B}$	$\sum$
A	$P(A)\cdot P(B)$	$P(A)\cdot P(\overline{B})$	$P(A)$
$\overline{A}$	$P(\overline{A})\cdot P(B)$	$P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})$	$P(\overline{A})$
$\sum$	$P(B)$	$P(\overline{B})$	1

Baumdiagramm