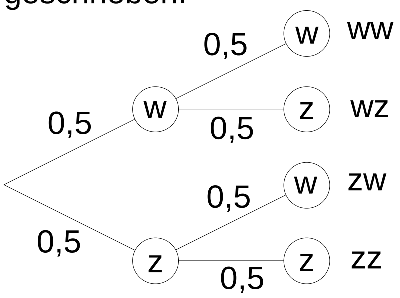
# Mehrstufige Zufallsversuche

Häufig müssen Zufallsversuche untersucht werden, die aus mehr als einem einzigen Experiment bestehen. Diese Versuche setzen sich aus mehreren hintereinander ausgeführten einstufigen Versuchen zusammen.

Beispiel Münzwurf:
Zwei Münzen werden gleichzeitig geworfen. Alle möglichen Ergebnisse werden in der Ergebnismenge zusammengefasst: S = { ww ; wz ; zw ; zz }.
Die Wahrscheinlichkeiten lassen sich einfach bestimmen (Laplace- Experiment).
P(ww) = P(wz) = P(zw) = P(zz) = 0,25

Nun wirft man eine Münze zweimal hintereinander und zeichnet dazu ein Baumdiagramm. Die Wahrscheinlichkeiten werden an die jeweiligen Pfade geschrieben.




Die Ergebnismenge S = { ww ; wz ; zw ; zz } ist natürlich dieselbe wie im ersten Versuch.
Die Wahrscheinlichkeit für das einzelne Ergebnis erhält man durch Multiplikation der Wahrscheinlichkeiten längs des Pfades:

$$P(ww) = 0,5 \cdot 0,5 = 0,25$$

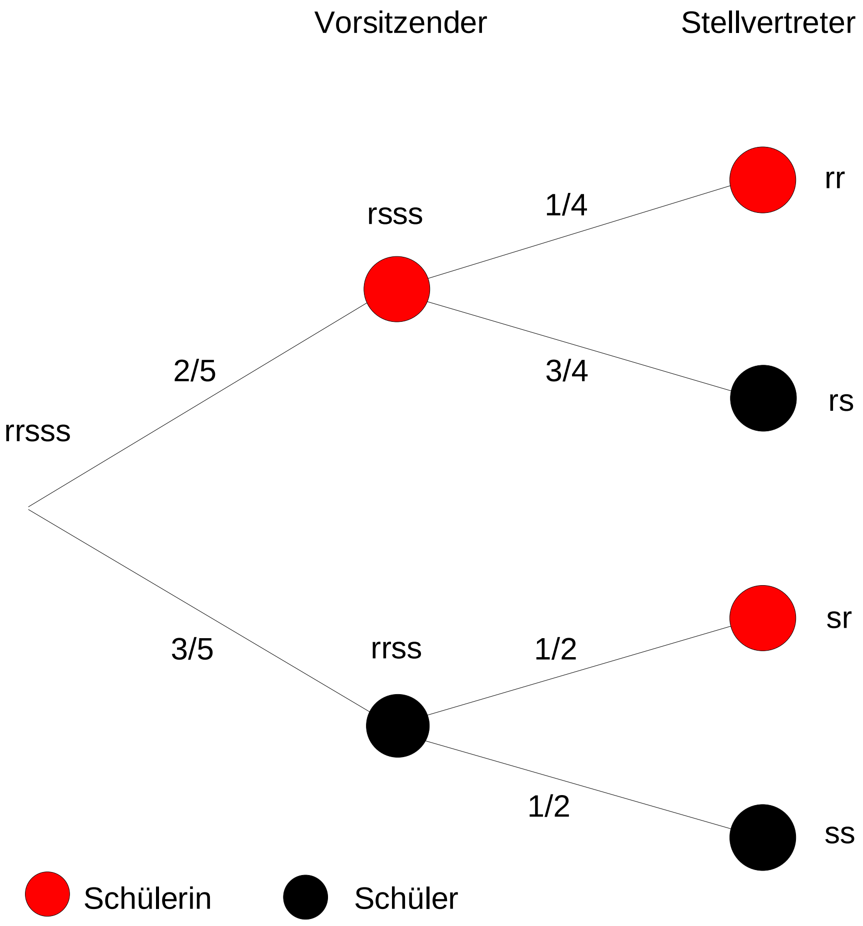
$$P(wz) = P(zw) = P(zz) = 0,25$$

Mit Hilfe solcher Ergebnisbäume, auch Baumdiagramme genannt, kann man übersichtlich Wahrscheinlichkeiten bei mehrstufigen Zufallsversuchen berechnen. Dabei stellt jeder Pfad ein Ergebnis des Zufallsexperimentes dar.

**Beispiel:**
Der Schülerrat eines Berufskollegs besteht aus 3 Schülern und 2 Schülerinnen.
Es wird ausgelost, wer in diesem Jahr Vorsitzender und Stellvertreter wird.
Zuerst wird der Vorsitzende und dann der Stellvertreter ausgelost.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird je eine **Schülerin** Vorsitzende und eine **Schülerin** Stellvertreterin?
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird eine **Schülerin** Vorsitzende und ein **Schüler** Stellvertreter?
c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird eine **Schülerin** Stellvertreterin?

Es handelt sich um ein zweistufiges Zufallsexperiment, das durch ein Urnenmodell simuliert werden kann. In der Urne befinden sich 5 Kugeln, **2 rote** stehen für **Schülerin** und **3 schwarze** stehen für **Schüler**.
Nacheinander werden zwei Kugeln aus der Urne gezogen
(Ziehen ohne zurücklegen).
Ein Baumdiagramm veranschaulicht diesen Sachverhalt.




$$P(rr)=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{10}=0{,}1$$

$$P(rs)=\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{10}=0{,}3$$

$$P(sr)=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{10}=0{,}3$$

$$P(ss)=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{10}=0{,}3$$

a) $A:$ Eine Schülerin ist Vorsitzende, die andere Stellvertreterin
$P(A)=P(rr)=0{,}1$

b) $B:$ Schülerin ist Vorsitzende und Schüler ist Stellvertreter
$P(B)=P(rs)=0{,}3$

c) $C:$ Schülerin ist Stellvertreterin $\Rightarrow C=\{rr;sr\}$
$P(C)=P(rr)+P(sr)=0{,}1+0{,}3=0{,}4$

Im Beispiel wurden Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe der **Pfadregel** berechnet.

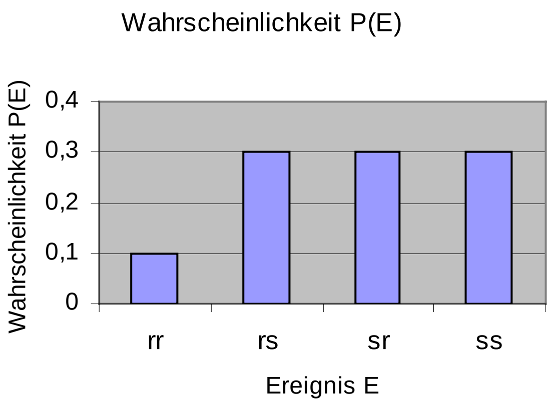
| | |
|---|---|
| **1. Pfadregel** | In einem Baumdiagramm ist die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades |

| | |
|---|---|
| **2. Pfadregel** | In einem Baumdiagramm ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses gleich der Summe der für dieses Ereignis zugehörigen Pfadwahrscheinlichkeiten |

| | |
|---|---|
| **Merke:** | In einem Baumdiagramm führt jeder Pfad zu einem Ergebnis des Zufallsversuches.<br>Die Wahrscheinlichkeit eines solchen Ergebnisses ergibt sich durch Multiplizieren aller Zweigwahrscheinlichkeiten entlang des zugehörigen Pfades. |

Fasst man die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Pfade in einer Tabelle zusammen, so erhält man die Wahrscheinlichkeitsverteilung.

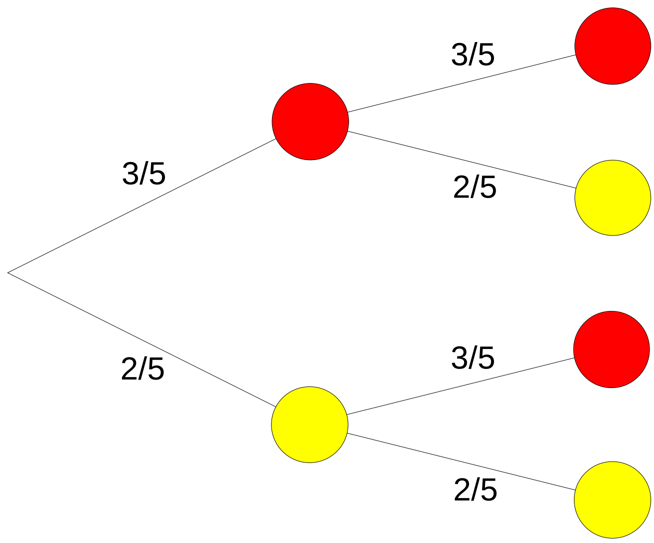
| E | rr | rs | sr | ss |
|---|---|---|---|---|
| $P(E)$ | 0,1 | 0,3 | 0,3 | 0,3 |




Sie lässt sich auch graphisch in einem Säulendiagramm darstellen.
Die Summe der Wahrscheinlichkeiten ergibt immer 1

**Beispiel:**
In einer Urne befinden sich 3 rote und 2 gelbe Kugeln. Nacheinander werden zwei Kugeln **mit zurücklegen** gezogen.
a) Erstellen Sie das Baumdiagramm und die Wahrscheinlichkeitsverteilung als Tabelle und als Diagramm.
b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A: Die gezogenen Kugeln haben ungleiche Farben.
c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B: Mindestens eine gezogenen Kugel ist gelb.

a)



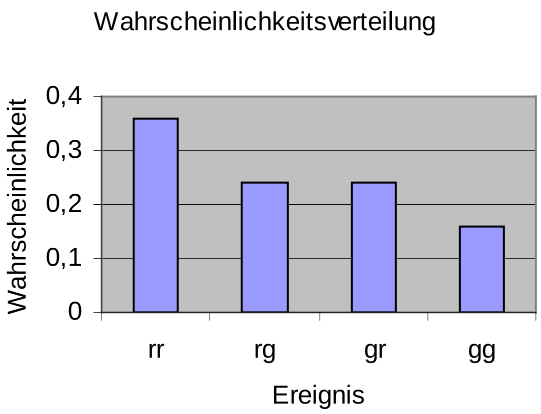

$$P(rr) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25} = 0{,}36$$

$$P(rg) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{25} = 0{,}24$$

$$P(gr) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{25} = 0{,}24$$

$$P(gg) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25} = 0{,}16$$

| E | rr | rg | gr | gg |
|---|---|---|---|---|
| $P(E)$ | 0,36 | 0,24 | 0,24 | 0,16 |



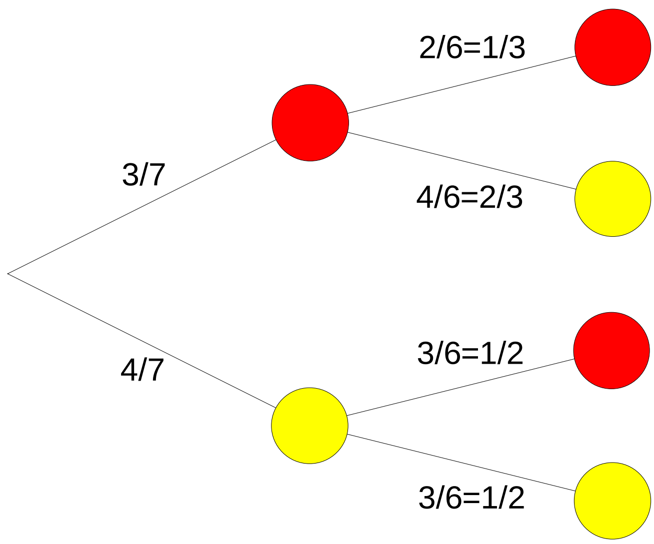

b)
$$A = \{rg;gr\} \Rightarrow P(A) = P(rg) + P(gr) = \frac{6}{25} + \frac{6}{25} = \frac{12}{25} = 0{,}48$$

c)
$$B = \{rg;gr;gg\} \Rightarrow P(A) = P(rg) + P(gr) + P(gg) = \frac{6}{25} + \frac{6}{25} + \frac{4}{25} = \frac{16}{25} = 0{,}64$$

**Beispiel:**

In einer Urne befinden sich 3 rote und 4 gelbe Kugeln. Nacheinander werden zwei Kugeln **ohne zurücklegen** gezogen.
a) Erstellen Sie das Baumdiagramm und die Wahrscheinlichkeitsverteilung als Tabelle und als Diagramm.
b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A: Die zweite gezogene Kugel ist rot.
c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B: Beide Kugeln haben die gleiche Farbe.

a)



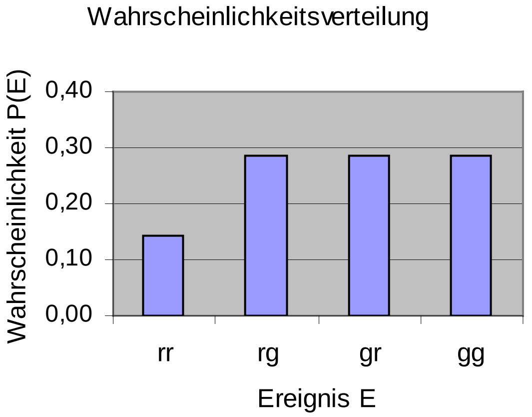

$$P(rr) = \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{7} \approx 0{,}143$$

$$P(rg) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{7} \approx 0{,}286$$

$$P(gr) = \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{7} \approx 0{,}286$$

$$P(gg) = \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{7} \approx 0{,}286$$

| E | rr | rg | gr | gg |
|---|---|---|---|---|
| $P(E)$ | $\frac{1}{7} \approx 0{,}143$ | $\frac{2}{7}$ | $\frac{2}{7}$ | $\frac{2}{7} \approx 0{,}286$ |




b) $A = \{rr; gr\} \Rightarrow P(A) = P(rr) + P(gr) = \frac{1}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3}{7} \approx 0{,}429$

c) $B = \{rr; gg\} \Rightarrow P(A) = P(rr) + P(gg) = \frac{1}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3}{7} \approx 0{,}429$